

NMA01

Tento dokument je neoficiálním, soukromým studijním materiálem. Text představuje autorskou syntézu, shrnutí a osobní interpretaci témat probíraných na přednáškách doc. Dr. Ing. Oberhubera v LS 2025/2026. Nejedná se o oficiální výukový materiál ČVUT, o doslovný přepis přednášek ani o dílo schválené vyučujícím. Všechny ochranné známky, názvy předmětů a případné citované metodiky jsou vlastnictvím příslušných držitelů práv.

Text je poskytován bezúplatně, pro osobní studijní potřeby a bez jakýchkoliv záruk za správnost, úplnost či aktuálnost obsahu. Autor nenese v souladu s § 2950 zákona č. 89/2012 Sb., občanský zákoník, odpovědnost za jakoukoliv újmu (včetně neúspěchu u zkoušek či jiných studijních povinností), která by vznikla v důsledku spoléhání se na informace v tomto textu. Užití materiálů je výhradně na vlastní nebezpečí čtenáře.

Čtenář by měl být rovněž upozorněn, že kolega Daniel Janda vypracoval daleko rozsáhlejší, detailnější a celkově lepší skriptu. Pokud tedy v tomto textu narazíte na cokoliv, co nedává smysl, s vysokou pravděpodobností jste měli raději číst Daniela.

Tímto prohlašuji, že jsem tento text vypracoval samostatně na základě vlastních poznámek pořízených v průběhu přednášek.

V Erlangen dne 15. srpna 2026

Obsah

Opakování z lineární algebry	1
DEF (Aritmetický vektor):	1
DEF (Sčítání vektorů a násobení vektoru číslem):	1
DEF (Standardní skalární součin dvou vektorů):	1
DEF (Axiomy skalárního součinu):	1
VĚTA (Schwarzova nerovnost):	2
DEF (Matice):	2
DEF (Sčítání matic a násobení matice číslem):	2
DEF (Násobení matice a vektoru a násobení dvou matic):	2
DEF (Determinant):	3
DEF: (Subdeterminant):	3
DEF (Transponovaná matice):	3
DEF (Komplexně sdružená matice):	3
DEF (Hermitovsky sdružená matice):	3
DEF (Hodnost matice):	4
DEF (Obraz matice):	4
DEF (Jádro matice):	4
DEF (Regulární matice):	4
DEF (Silně regulární matice):	4
DEF (Diagonální matice):	5
DEF (Normální matice):	5
DEF (Samozdružená matice):	5
DEF (Izometrická matice):	5
VĚTA (Unitrání matice):	5
DEF (Bloková matice):	6
DEF (Řídká matice)	6
Rozklady matic	7
DEF (Horní a dolní trojúhelníková matice):	7
VĚTA (Součin trojúhelníkových matic):	7
VĚTA (Inverze trojúhelníkové matice):	7
DEF (Podobnost matic):	8
VĚTA (Vlastnosti podobných matic):	8
DEF (Diagonalizovatelnost):	8
VĚTA (Diagonalizovatelnost a násobnosti):	8
VĚTA (O rozkladu na dolní a horní troj. matici):	9
DEF (Vlastní čísla, vekotry, spektrum, spektrální poloměr):	10
DEF (Charakteristická rovnice, polynom):	10

OBSAH

DEF (Algebraická, geometrická násobnost):	10
DEF (Householderova refleční maticí):	10
VĚTA ():	10
VĚTA ():	11
VĚTA (O významu Householderovy refleční matice):	11
VĚTA ():	12
VĚTA (Schurova):	13
VĚTA ():	14
VĚTA (Schurova věta pro normální matice):	14
VĚTA (Jordanova):	15
Posloupnosti vektorů a matic	17
DEF (Posloupnost vektorů):	17
DEF (Posloupnost matic):	17
DEF (Norma):	17
VĚTA (Ekvivalence norem na $\mathbb{C}^n$):	18
VĚTA (O konvergenci vektorů v normě):	18
DEF (Maticová norma):	18
DEF (Souhlasná maticová norma):	19
DEF (Indukovaná maticová norma):	19
VĚTA ():	19
DEF (Pozitivně definitní matice):	19
VĚTA ():	20
DEF (Mocnina PD hermitovské matice):	20
DEF (Energetická vektorová a maticová norma):	20
VĚTA ():	20
VĚTA ():	20
VĚTA ():	21
VĚTA (Konvergence geometrické řady):	21
VĚTA (Chyba geometrické řady):	21

Opakování z lineární algebry

Některé termíny by člověk zapomínat neměl, neboť jej provází celý život. Následující termíny jsou přesně téhož druhu, připomínáme si je spíše za účelem seznámení autorského značení.

DEF (Aritmetický vektor):

Aritmetický vektor $\vec{x}$ je uspořádaná n -tice čísel $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$.

Píšeme $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

DEF (Sčítání vektorů a násobení vektoru číslem):

Sčítání vektorů je po složkách tj. $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

násobení vektoru číslem po složkách tj. $\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

DEF (Standardní skalární součin dvou vektorů):

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

DEF (Axiomy skalárního součinu):

Pro takto definovaný skalární součin platí následující:

- $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ a $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$,
- $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}$,
- $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$,
- $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$,

kde $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{C}^n$ a $\lambda \in \mathbb{C}$.

OPAKOVÁNÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

VĚTA (Schwarzova nerovnost):

$$|(\vec{x}, \vec{y})|^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$$

Rovnost nastává, právě když jsou vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně závislé.

DEF (Matice):

Matice s rozměry $n \times m$ je daná čísly $a_{ij} \in \mathbb{C}, i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$. Matici chápeme jako posloupnost m vektorů z nichž každý má n řádků. Píšeme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m}$$

DEF (Sčítání matic a násobení matice číslem):

$$\text{Pro } \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,m} \text{ je } \mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\text{pro } \mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}, \lambda \in \mathbb{C} \text{ je } \lambda \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

DEF (Násobení matice a vektoru a násobení dvou matic):

$$\text{Pro } \mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m} \text{ a } \vec{x} \in \mathbb{C}^m \text{ je } \mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ni}x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

$$\text{pro } \mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,k}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{k,m} \text{ je } \mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k a_{1i}b_{ik} & \dots & \sum_{i=1}^k a_{1i}b_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^k a_{ni}b_{ik} & \dots & \sum_{i=1}^k a_{ni}b_{im} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m}.$$

pozn. : platí $(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$, ale $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$

OPAKOVÁNÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

DEF (Determinant):

Pro čtvercové matice řádu n def $\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$,

kde S_n je množina všech permutací na $\hat{n}$ a $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\#\text{transpozic } \pi}$

pozn. : Někde narazíme na $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\#\text{inverzí}}$ místo $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\#\text{transpozic}}$. Definice jsou ekvivalentní, lze dokázat, že počet inverzí a transpozic mají stejnou paritu

DEF: (Subdeterminant):

Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$. Subdeterminant řádu q vybraný z matice $\mathbb{A}$ je determinant čtvercové matice řádu q získané z matice $\mathbb{A}$ odstraněním lib. $n - q$ řádků a $m - q$ sloupců.

DEF (Transponovaná matice):

$$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}, (\mathbb{A}^\top)_{ij} = a_{ji}$$

DEF (Komplexně sdružená matice):

$$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}, (\overline{\mathbb{A}})_{ij} = \overline{a_{ij}}$$

pozn. :

- $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$,
- $\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\overline{\mathbb{B}}$

DEF (Hermitovsky sdružená matice):

$$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}, \mathbb{A}^* = \overline{\mathbb{A}^\top}$$

pozn. :

- $(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \overline{(\mathbb{A}\mathbb{B})}^\top = \overline{\mathbb{B}}^\top \overline{\mathbb{A}}^\top = \mathbb{B}^* \mathbb{A}^*$,
- $\det \mathbb{A}^\top = \det \mathbb{A}$,
- $\det \mathbb{A}^* = \overline{\det \mathbb{A}}$.

dále pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí:

$$(\mathbb{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\mathbb{A}\vec{x})^\top \vec{y} = \vec{x}^\top \mathbb{A}^\top \vec{y} = \vec{x}^\top \overline{\overline{\mathbb{A}^\top} \vec{y}} = \vec{x}^\top \overline{\mathbb{A}^* \vec{y}} = (\vec{x}, \mathbb{A}^* \vec{y})$$

OPAKOVÁNÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

DEF (Hodnost matice):

Zn. $h(\mathbb{A})$ a je to maximální počet nenulových subdeterminantu různého řádu vybraných z matice $\mathbb{A}$

pozn. : Alt. def počet LN sloupců matice $\mathbb{A}$, lze si rozmyslet, že obě def jsou ekvivalentní.

DEF (Obraz matice):

Obraz matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je vekt. prostor def jako $\text{ran}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \vec{x} \in \mathbb{C}^m\}$

DEF (Jádro matice):

Jádro matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je vekt. prostor def jako $\text{ker}(\mathbb{A}) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^m \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\}$

pozn. : pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$

- $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^\top)$
- $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^*)$
- $h(\mathbb{A}) + \dim(\text{ker}(\mathbb{A})) = m$

DEF (Regulární matice):

$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární, právě když $h(\mathbb{A}) = n$. Jinak je matice singulární.

pozn. : $\det \mathbb{A} \neq 0 \iff \mathbb{A} \text{ reg.}$

DEF (Silně regulární matice):

$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je silně regulární, právě když platí

$$\begin{aligned} & a_{11} \neq 0, \\ & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0, \\ & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0, \\ & \vdots \\ & \det \mathbb{A} \neq 0. \end{aligned}$$

OPAKOVÁNÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

DEF (Diagonální matice):

$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je diagonální, právě když $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $i, j \in \hat{n}$

pozn. : jednotková matice je diagonální matice taková, že $a_{ii} = 1$

pozn. : pro reg. matici $\mathbb{A}$ existuje matice $\mathbb{A}^{-1}$ taková, že $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$

DEF (Normální matice):

$\mathbb{A}$ je normální $\iff \mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$

DEF (Samozdružená matice):

$\mathbb{A}$ je samozdružená $\iff \mathbb{A}^* = \mathbb{A}$. Dále je-li navíc $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ řekneme, že $\mathbb{A}$ je symetrická. Je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, je $\mathbb{A}$ hermitovská.

DEF (Izometrická matice):

$\mathbb{A}$ je izometrická $\iff \mathbb{A}^* = \mathbb{A}^{-1}$. Dále je-li navíc $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ řekneme, že $\mathbb{A}$ je ortogonální. Je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, je $\mathbb{A}$ unitární.

pozn. : Ekv. definice $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{I}$.

pozn. : $\mathbb{I}$ je ortogonální i unitární.

pozn. : Nt $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$

- jsou-li matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ortogonální $\implies \mathbb{A}\mathbb{B}$ ortogonální
- je-li matice $\mathbb{A}$ ortogonální $\implies \det \mathbb{A} = \pm 1$

pozn. : Nt $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{\kappa, \kappa}$

- jsou-li matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ unitární $\implies \mathbb{A}\mathbb{B}$ unitární
- je-li matice $\mathbb{A}$ unitární $\implies \det \mathbb{A} = \pm 1$

VĚTA (Unitrání matice):

Pro unitární resp. ortogonální matici $\mathbb{U}$ platí, že její sloupce (a stejně tak i její řádky) jsou ortonormální

$$\begin{aligned} \text{Dk: } \delta_{ij} = (\mathbb{I})_{ij} &= (\mathbb{U}\mathbb{U}^*)_{ij} = \sum_{k=1}^n u_{ik} \overline{u_{jk}} = (\mathbb{U}_{i\cdot}, \mathbb{U}_{j\cdot}) \\ \delta_{ij} = (\mathbb{I})_{ij} &= (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{u_{ki}} u_{kj} = (\mathbb{U}_{\cdot j}, \mathbb{U}_{\cdot i}) \end{aligned}$$

OPAKOVÁNÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

DEF (Bloková matice):

Bloková matice je taková, že její jednotlivé prvky opět tvoří matice. Přitom musí platit, že prvky blokové matice ve stejném sloupci mají stejný počet sloupců a prvky blokové matice ve stejném řádku mají stejný počet řádků.

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Nechť } \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

Pokud mají příslušné bloky matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ stejné rozměry, pak lze tyto matice sečíst po blocích, tj. $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} + \mathbb{B}_{11} & \mathbb{A}_{12} + \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} + \mathbb{B}_{21} & \mathbb{A}_{22} + \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix}$.

$$\text{Je-li } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ pak } \lambda \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{A}_{11} & \lambda \mathbb{A}_{12} \\ \lambda \mathbb{A}_{21} & \lambda \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Chceme-li spočítat součin $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$, pak platí

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

$$\mathbb{C}_{11} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{B}_{11} + \mathbb{A}_{12}\mathbb{B}_{21},$$

$$\mathbb{C}_{12} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{B}_{12} + \mathbb{A}_{12}\mathbb{B}_{22},$$

$$\mathbb{C}_{21} = \mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_{11} + \mathbb{A}_{22}\mathbb{B}_{21},$$

$$\mathbb{C}_{22} = \mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_{12} + \mathbb{A}_{22}\mathbb{B}_{22},$$

a požadujeme, aby matice $\mathbb{A}_{11}$ měla stejný počet sloupců jako má matice $\mathbb{B}_{11}$ řádků. To samé požadujeme pro bloky $\mathbb{A}_{12}$ a $\mathbb{B}_{21}$ a podobně pro další bloky.

DEF (Řídká matice)

Taková matice, která má většinu svých prvků nulových.

Rozklady matic

DEF (Horní a dolní trojúhelníková matice):

$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je:

horní trojúhelníková, právě když $a_{ij} = 0$ pro $j > i$, $i, j \in \hat{n}$

$$\text{tj. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dolní trojúhelníková, právě když $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i, j \in \hat{n}$

$$\text{tj. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

VĚTA (Součin trojúhelníkových matic):

Součin dvou horních (resp. dolních) trojúhelníkových matic je horní (resp. dolní) matice. Přitom na diagonále má výsledná matice součin odpovídajících diagonálních prvků původních matic.

Dk: Búno součin dvou dolních troj. matic $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{C}$, chci $c_{ij} = 0$, $j > i$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \underbrace{\sum_{k=1}^i a_{ik} b_{kj}}_{k \leq i < j \Rightarrow b_{kj}=0} + \underbrace{\sum_{k=i+1}^n a_{ik} b_{kj}}_{i < k \Rightarrow a_{ik}=0} = 0$$

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} b_{ki} = a_{ii} b_{ii}$$

VĚTA (Inverze trojúhelníkové matice):

Inverzní matice k horní (resp. dolní) trojúhelníkové matici je opět horní (resp. dolní) trojúhelníkové matice a její diagonální prvky jsou převrácené hodnoty odpovídajících diagonálních prvků původní matice.

Dk: Búno dolní. $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{\text{adj}}$, chci $\mathbb{A}_{ij}^{-1} = 0$, $j > i$

$[\mathbb{A}^{\text{adj}}]_{ij} = (-1)^{j+i} \det \mathbb{A}^{ji}$, kde $\mathbb{A}^{ji}$ je $\mathbb{A}$ bez j -tého řádku a i -tého sloupce.

ROZKLADY MATIC

Nyní si stačí všimnout, že kdykoliv $j > i$, $\det \mathbb{A}^{ji} = 0$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \implies \mathbb{A}^{42} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{23} & 0 & & \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}^{42}$ má na diag. nulový prvek a je stále troj. $\implies \det \mathbb{A}^{42} = 0$

Dále $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$ a z předchozí věty $a_{ii} \cdot a_{ii}^{-1} = 1 \implies a_{ii}^{-1} = \frac{1}{a_{ii}}$, $i \in \hat{n}$

DEF (Podobnost matic):

Nt' $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B} \iff$ existuje reg. matice $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^{n,n}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{X}$. Tuto operaci nazýváme podobnostní transformací maticí $\mathbb{X}$.

VĚTA (Vlastnosti podobných matic):

Nt' $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{B}$. Potom platí:

- $p_{\mathbb{A}} = p_{\mathbb{B}}$, tudíž i $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$ a $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$,
- $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$,
- $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B}$.

Dk: $\emptyset$

DEF (Diagonalizovatelnost):

Nt' $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná, pokud je podobná diagonální matici, tj. existuje diagonální matice $\mathbb{D}$ a regulární matice $\mathbb{X}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

VĚTA (Diagonalizovatelnost a násobnosti):

Necht' $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

Dk: $\emptyset$

ROZKLADY MATIC

VĚTA (O rozkladu na dolní a horní troj. matici):

Každou silně regulární matici $\mathbb{A}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru součinu

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{R},$$

kde:

- $\mathbb{L}$ je dolní troj. matice s jedničkami na diagonále
- $\mathbb{R}$ je horní troj. matice s jedničkami na diagonále
- $\mathbb{D}$ je diagonální matice

Dk: Indukcí: $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{nn}$

1) Existence

$$n = 1, \mathbb{A} = (a_{11}) = 1 \cdot (a_{11}) \cdot 1$$

indukční krok: $n-1 \rightarrow n$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{n-1} & \vec{v} \\ \vec{n}^\top & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}^{n-1} & \vec{0} \\ \vec{l}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{D}^{n-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^\top & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{n-1} & \vec{r} \\ \vec{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{L}^{n-1}\mathbb{D}^{n-1} & \vec{0} \\ \vec{l}^\top\mathbb{D}^{n-1} & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{n-1} & \vec{r} \\ \vec{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}^{n-1}\mathbb{D}^{n-1}\mathbb{R}^{n-1} & \mathbb{L}^{n-1}\mathbb{D}^{n-1}\vec{r} \\ \vec{l}^\top\mathbb{D}^{n-1}\mathbb{R}^{n-1} & \vec{l}^\top\mathbb{D}^{n-1}\vec{r} + \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kde $\mathbb{L}^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$ je dolní troj. matice s 1 na diag., $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$ diag., anal. $\mathbb{R} \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$ horní troj. matice s 1 na diag. a $\vec{v}, \vec{n}, \vec{l}, \vec{r} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\alpha, \delta \in \mathbb{C}$.

Lze rovnou vyjádřit a rozmyslet, že existují:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^{n-1}\mathbb{D}^{n-1}\vec{r} &= \vec{v} \Rightarrow \vec{r} = (\mathbb{L}^{n-1}\mathbb{D}^{n-1})^{-1}\vec{v} \\ \vec{l}^\top\mathbb{D}^{n-1}\mathbb{R}^{n-1} &= \vec{u}^\top \Rightarrow \vec{l}^\top = \vec{u}^\top(\mathbb{D}^{n-1}\mathbb{R}^{n-1})^{-1} \\ \vec{l}^\top\mathbb{D}^{n-1}\vec{r} + \delta &= \alpha \Rightarrow \delta = \alpha - \vec{l}^\top\mathbb{D}^{n-1}\vec{r} \end{aligned}$$

2) Jednoznačnost

$$\text{sporem nt' } \mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{R} = \tilde{\mathbb{L}}\tilde{\mathbb{D}}\tilde{\mathbb{R}}$$

$$(\tilde{\mathbb{L}})^{-1}\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{R} = \tilde{\mathbb{D}}\tilde{\mathbb{R}}$$

$$(\tilde{\mathbb{L}})^{-1}\mathbb{L}\mathbb{D} = \tilde{\mathbb{D}}\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{-1}$$

Na levé straně je součin dvou dolních troj. matic s diagonální maticí, kdy vzniká další dolní troj. matice a na pravé straně anal. vzniká horní troj. matice. Jelikož se rovnají, musí výsledné matice být diagonální.

Dále z předchozí věty má $(\tilde{\mathbb{L}})^{-1}\mathbb{L}$ a $\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{-1}$ jedničky na diagonále a tedy $(\tilde{\mathbb{L}})^{-1}\mathbb{L} = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{L} = \tilde{\mathbb{L}}$, $\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{-1} = \mathbb{I} \Rightarrow \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, a $\mathbb{D} = \tilde{\mathbb{D}}$.

pozn. : LDR rozklad není podobnost. transf., na diag. $\mathbb{D}$ nejsou vl. čísla. $\mathbb{A}$

ROZKLADY MATIC

DEF (Vlastní čísla, vektory, spektrum, spektrální poloměr):

Vlastním číslem matice $\mathbb{A}$ nazv. takové číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které existuje nenulový vektor $\vec{x}$ takový, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ se nazývá vlastním vektorem matice $\mathbb{A}$ k číslu λ . Množina všech vlastních čísel matice $\mathbb{A}$ se nazývá spektrum, značíme $\sigma(\mathbb{A})$. Číslo $\rho(\mathbb{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} |\lambda|$ nazveme spektrální poloměr matice $\mathbb{A}$.

DEF (Charakteristická rovnice, polynom):

Rovnici $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0$ nazv. charakteristickou rovnicí matice $\mathbb{A}$ a polynom $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ charakteristickým polynomem matice $\mathbb{A}$.

DEF (Algebraická, geometrická násobnost):

Násobnost vlastního čísla λ jakožto kořene charakter. polynomu se nazývá algebraická násobnost a značí se $\nu_a(\lambda)$. Počet LN vlastních vektorů k vlastnímu číslu λ je jeho geometrická násobnost a značí se $\nu_g(\lambda)$.

DEF (Householderova refleční maticí):

Householderova refleční matice je každá matice $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ tvaru

$$H_{\vec{w}} = \mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*,$$

kde $\vec{w}$ je Householderův vektor, pro který platí $\|\vec{w}\|_2 = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = 1$

VĚTA ():

Householderova refleční matice je hermitovská a unitární

Dk:¹ i) $\mathbb{H} \stackrel{?}{=} \mathbb{H}^*$

$$\mathbb{H}^* = (\mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*)^* = \mathbb{I} - 2(\vec{w}\vec{w}^*)^* = \mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^* = \mathbb{H}$$

$$\text{ii) } \mathbb{H}^* \stackrel{?}{=} \mathbb{H}^{-1}, \text{ tj. } \mathbb{H}^*\mathbb{H} \stackrel{?}{=} \mathbb{I}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^*\mathbb{H} &\stackrel{(i)}{=} \mathbb{H}\mathbb{H} = (\mathbb{I} - \vec{w}\vec{w}^*)(\mathbb{I} - \vec{w}\vec{w}^*) = \mathbb{I} - 4\vec{w}\vec{w}^* + 4\vec{w}\vec{w}^*\vec{w}\vec{w}^* = \mathbb{I} - 4\vec{w}\vec{w}^* \\ &\quad + 4\vec{w}(\vec{w}, \vec{w})\vec{w}^* \stackrel{=1}{=} \mathbb{I} \end{aligned}$$

¹Autor je líný psát indexy u matice $\mathbb{H}_{\vec{w}}$, čtenář je nucen si jej domyslet.

ROZKLADY MATIC

VĚTA ():

Nt $\mathbb{U}$ je unitární matice, pak platí $\|\mathbb{U}\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2$

Dk: $\|\mathbb{U}\vec{x}\|_2^2 = (\mathbb{U}\vec{x}, \mathbb{U}\vec{x}) = (\vec{x}, \mathbb{U}^* \mathbb{U}\vec{x}) = (\vec{x}, \mathbb{U}^{-1} \mathbb{U}\vec{x}) = (\vec{x}, \mathbb{I}\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x}\|_2^2$

VĚTA (O významu Householderovy refleční matice):

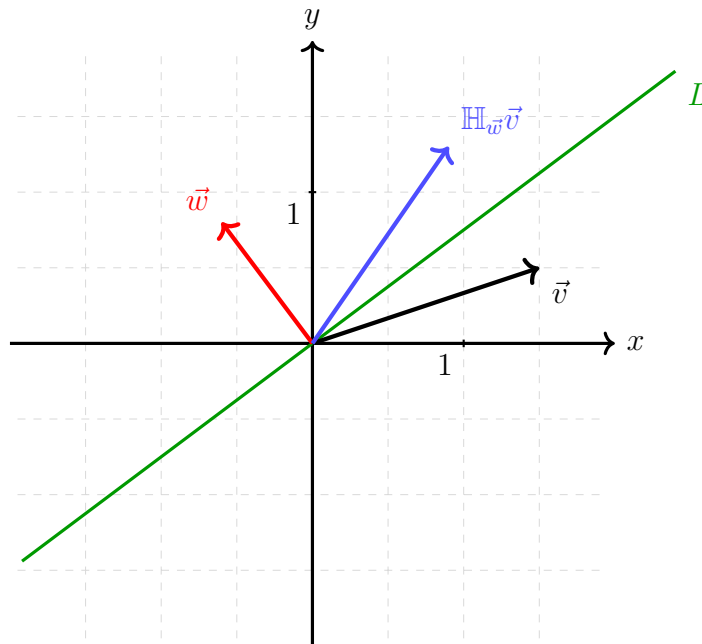
Nt $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ je Householderova refleční matice a $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ je libovolný vektor.

Pak vektor $\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v}$ je zrcadlový obraz vektoru $\vec{v}$ podle nadroviny

$$L \equiv \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \vec{w}^* \vec{x} = (\vec{x}, \vec{w}) = 0\}$$

v tom smyslu, že splňuje následující podmínky:

- $\|\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v}\|_2 = \|\vec{v}\|_2$
- $\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v} + \vec{v} \in L$
- $(\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v} - \vec{v}) \perp L$



Obrázek 1: Householder. transf. Vektor $\vec{w}$ určí nadrovinu L , která je kolmá na $\vec{w}$. Pak lze lib. vektor $\vec{v}$ zrcadlově zobrazit podle L , splň. podm. nahoře.

ROZKLADY MATIC

Dk: i) $\mathbb{H}$ je unitární, dále viz lemma

$$\begin{aligned} \text{ii) } \mathbb{H}\vec{v} + \vec{v} \in L &\iff 0 = (\mathbb{H}\vec{v} + \vec{v}, \vec{w}) = ((\mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*)\vec{v} + \vec{v}, \vec{w}) \\ &= (2\vec{v} - 2\vec{w}\underbrace{\vec{w}^*\vec{v}}_{(\vec{v}, \vec{w})}, \vec{w}) = 2(\vec{v}, \vec{w}) - 2(\vec{v}, \vec{w})\underbrace{(\vec{w}, \vec{w})}_1 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \vec{x} \in L, 0 &= (\mathbb{H}\vec{v} - \vec{v}, \vec{x}) = ((\mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*)\vec{v} - \vec{v}, \vec{x}) \\ &= -2(\vec{w}\vec{w}^*\vec{v}, \vec{x}) = -2\underbrace{\vec{x}^*\vec{w}}_{(\vec{w}, \vec{x})=0} \vec{w}^*\vec{v} \end{aligned}$$

VĚTA ():

Je-li vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, pak existuje $\mathbb{H}_{\vec{w}}$, že

$$\mathbb{H}_{\vec{w}}\mathbb{A}\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_1^2$$

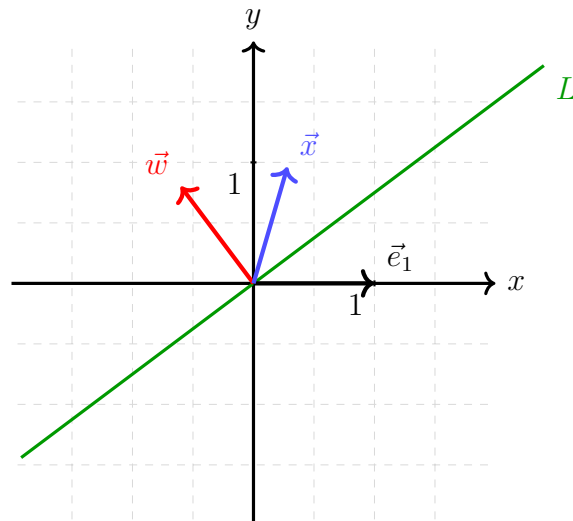
Dk: Příprava: $\mathbb{H} \stackrel{\text{herm.}}{=} \mathbb{H}^* \stackrel{\text{unit.}}{=} \mathbb{H}^{-1}$

$$\underbrace{\mathbb{H}\mathbb{A}\mathbb{H}^{-1}}_{A'}\vec{e}_1 = A'\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{n1} \end{pmatrix} = \lambda\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ tj. } \mathbb{H}\mathbb{A}\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \lambda & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H}\mathbb{A}\mathbb{H}\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_1,$$

$$\mathbb{A}\mathbb{H}\vec{e}_1 = \lambda\mathbb{H}^{-1}\vec{e}_1 = \lambda\mathbb{H}\vec{e}_1 \implies \mathbb{H}\vec{e}_1 \text{ vl. vektor } \mathbb{A} \text{ přísl. } \lambda, \text{ ozn. } \vec{x} = \mathbb{H}\vec{e}_1$$

K existenci $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ stačí ukázat jak volit $\vec{w}$. Z věty nahoře víme $\vec{x} - \vec{e}_1 \perp L$, pak stačí normovat na 1 a tedy $\vec{w} = \frac{\vec{x} - \vec{e}_1}{\|\vec{x} - \vec{e}_1\|_2}$



$$^2\vec{e}_1 = (1 \dots 0)^T$$

ROZKLADY MATIC

VĚTA (Schurova):

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ existuje unitární matice U taková, že

$$A = U^* R U,$$

kde R je horní trojúhelníková matice.

$$\text{Dk:}^3 A \in \mathbb{C}^{n,n} \implies A = U^* R U \iff U A U^* = R$$

$$1) \lambda_1 \in \sigma(A) \Rightarrow \exists H_1 \in \mathbb{C}^{n,n}, H_1 A H_1 \vec{e}_1 = \lambda_1 \vec{e}_1$$

$$H_1 A H_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{v}_1^\top \\ \vec{0} & A_1^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 \in \mathbb{C}^{n-1}, A_1^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$$

$$2) \lambda_2 \in \sigma(A_1^{n-1}) \Rightarrow \exists H_2^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}, H_2^{n-1} A_1^{n-1} H_2^{n-1} \vec{e}_1 = \lambda_2 \vec{e}_1$$

$$H_2^{n-1} A_1^{n-1} H_2^{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \vec{v}_2^\top \\ \vec{0} & A_2^{n-2} \end{pmatrix}, \quad \text{def. } H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & H_2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow H_2 H_1 A H_1 H_2 &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & H_2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{v}_1^\top \\ \vec{0} & A_1^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & H_2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{v}_1^\top H_2^{n-1} \\ \vec{0} & H_2^{n-1} A_1^{n-1} H_2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & \vec{v}_2^\top \\ \vec{0} & \vec{0} & A_2^{n-2} \end{pmatrix}^4 \end{aligned}$$

$$k) \lambda_k \in \sigma(A_{k-1}^{n-k+1}) \Rightarrow \exists H_k^{n-k+1} \in \mathbb{C}^{n-k+1,n-k+1}$$

$$H_k^{n-k+1} A_{k-1}^{n-k+1} H_k^{n-k+1} = \begin{pmatrix} \lambda_k & \vec{v}_k^\top \\ \vec{0} & A_k^{n-k} \end{pmatrix}, \quad \text{def. } H_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & H_k^{n-k+1} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow H_k \dots H_1 A H_1 \dots H_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \lambda_k & * \\ \vec{0} & \dots & \vec{0} & A_k^{n-k} \end{pmatrix}$$

$$n-1) \underbrace{H_{n-1} \dots H_1}_U A \underbrace{H_1 \dots H_{n-1}}_{U^*} = R$$

$$U^* = (H_{n-1} \dots H_1)^* = H_1^* H_2^* \dots H_{n-1}^* = H_1 H_2 \dots H_{n-1}$$

$$U A U^* = R \iff A = U^* R U$$

³Pozorný čtenář si všimne, že se jedná o opakovanou aplikaci důkazu z minulé věty.

⁴Znakem (*) ozn. nějaké prvky, které nás až tak nezajímají a autora obzvláště ne.

ROZKLADY MATIC

pozn. : Schurova věta už podobnostní transf. je, neboť $\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{U} = \mathbb{U}^{-1} \mathbb{R} \mathbb{U}$. Věta platí pro libovolnou čtvercovou matici (i nediagonalizovatelnou), daň za tuto obecnost je však podobnost pouze s horní trojúhelníkovou maticí místo diagonální.

pozn. : Z konstrukce důkazu by se mohlo zdát, že pomocí Schurovy věty lze zjistit $\sigma(\mathbb{A})$. Není tomu tak, všechna λ_i , $i \in \hat{n}$ je nutno znát předem.

VĚTA ():

Normální trojúhelníková matice je diagonální

Dk: Indukcí: $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^n$ norm. a buno dolní troj.

$n = 1$: $\mathbb{A} = (a_{11})$, triv. diagonální

$$n-1 \rightarrow n : \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{n-1} & \vec{0} \\ \vec{l}^\top & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} \mathbb{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{n-1} & \vec{0} \\ \vec{l}^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbb{A}^*)^{n-1} & \vec{l} \\ \vec{0}^\top & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{n-1} (\mathbb{A}^*)^{n-1} & \mathbb{A}^{n-1} \vec{l} \\ \vec{l}^\top (\mathbb{A}^*)^{n-1} & \vec{l}^\top \vec{l} + |\alpha|^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}^* \mathbb{A} = \begin{pmatrix} (\mathbb{A}^*)^{n-1} & \vec{l} \\ \vec{0}^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{n-1} & \vec{0} \\ \vec{l}^\top & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbb{A}^*)^{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \vec{l} \vec{l}^\top & \alpha \vec{l} \\ \bar{\alpha} \vec{l}^\top & |\alpha|^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{l}^\top \vec{l} + |\alpha|^2 = |\alpha|^2 \implies \vec{l} = \vec{0}$$

$$\mathbb{A} \mathbb{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{n-1} (\mathbb{A}^*)^{n-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^\top & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbb{A}^*)^{n-1} \mathbb{A}^{n-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^\top & |\alpha|^2 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^* \mathbb{A}$$

$\mathbb{A}^{n-1} (\mathbb{A}^*)^{n-1} = (\mathbb{A}^*)^{n-1} \mathbb{A}^{n-1} \implies \mathbb{A}^{n-1}$ norm., navíc dolní troj. tj. splň. IP

tzn. $\mathbb{A}^{n-1}$ diag. $\implies \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{n-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^\top & \alpha \end{pmatrix}$ diag.

VĚTA (Schurova věta pro normální matice):

Pro libovolnou normální matici $\mathbb{A}$ existuje unitární matice $\mathbb{U}$ taková, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U},$$

kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská, pak $\mathbb{D}$ má na diagonále reálná čísla.

Dk: $\mathbb{A}$ norm $\iff \mathbb{A} \mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \mathbb{A}$

$$\mathbb{A} \mathbb{A}^* = (\mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{U})(\mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{U})^* = \mathbb{U} \mathbb{R} \mathbb{U} \mathbb{U}^* \mathbb{R}^* \mathbb{U} = \mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{R}^* \mathbb{U}$$

$$\mathbb{A}^* \mathbb{A} = (\mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{U})^* (\mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{U}) = \mathbb{U}^* \mathbb{R}^* \mathbb{U} \mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{U} = \mathbb{U}^* \mathbb{R}^* \mathbb{R} \mathbb{U}$$

$$\mathbb{R} \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^* \mathbb{R} \implies \mathbb{R} \text{ norm. + troj.} \implies \mathbb{R} \text{ diag. označ. } \mathbb{R} \equiv \mathbb{D}$$

ROZKLADY MATIC

Nt. $\mathbb{A}$ herm $\iff \mathbb{A} = \mathbb{A}^*$

$\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U} \iff \mathbb{D} = \mathbb{U} \mathbb{A} \mathbb{U}^* = \mathbb{U} \mathbb{A}^* \mathbb{U}^* = \mathbb{D}^*$

tj. $\mathbb{D}$ herm. $\implies$ Diagonála $\mathbb{D}$ reálná

VĚTA (Jordanova):

Nt. $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ jsou všechna její navzájem různá vlastní čísla. Pak existuje regulární matice $\mathbb{T}$ taková, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{J}_1^1 & & & & & & \\ & \mathbb{J}_2^1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbb{J}_{s_1}^1 & & & \\ & & & & \mathbb{J}_1^2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathbb{J}_{s_2}^2 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \mathbb{J}_{s_p}^p \end{pmatrix} \mathbb{T},$$

kde diagonální bloky jsou tvaru

$$\mathbb{J}_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix},$$

pro $k \in \hat{p}, i \in \hat{s}_k$. Přitom až na pořadí diagonálních bloků je tato matice dána jednoznačně.

Dk: $\emptyset$

ROZKLADY MATIC

.

Posloupnosti vektorů a matic

DEF (Posloupnost vektorů):

Nt je dána posloupnost vektorů $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^\top$ pro $k \in \mathbb{N}$.
 Řek., že posl. $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ konverguje k vektoru $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$, právě tehdy
 když $\forall i \in \hat{n}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$, znač $\vec{x}^{(k)} \rightarrow \vec{x}$, nebo $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}$

DEF (Posloupnost matic):

Posloupnost matic $\mathbb{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \dots & a_{1m}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(k)} & \dots & a_{nm}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m}$, pro $k \in \mathbb{N}$,

konverguje k matici $\mathbb{A}$, právě tehdy když $\forall a_{ij}, i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$

pozn. : Dokazovat konvergenci po prvcích by bylo velmi pracné, k vyšetřování konvergence budeme radši využívat normu.

DEF (Norma):

Zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazv. norma na množině vektorů z $\mathbb{C}^n$, splňuje-li
 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ a $\forall \alpha \in \mathbb{C}$:

- $\|\vec{x}\| \geq 0 \wedge (\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0})$ (pozitivní definitnost),
- $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$ (homogenita),
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Pozn.: $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \iff \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{y}$.

Pozn. : (Př. norem)

- euklidovská norma : $\|\vec{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,
- součtová norma : $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- maximová norma : $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i \in \hat{n}} |x_i|$.

POSLOUPNOSTI VEKTORŮ A MATIC

Lze ukázat, že tyto normy jsou jen spec. případem obecně def. p-normy

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

VĚTA (Ekvivalence norem na $\mathbb{C}^n$):

Pro libovolné dvě normy $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existují kladné konstanty γ_1, γ_2 splňující $\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n$:

$$\gamma_1 \|\vec{x}\|_\alpha \leq \|\vec{x}\|_\beta \leq \gamma_2 \|\vec{x}\|_\alpha$$

Dk: viz ANA3

VĚTA (O konvergenci vektorů v normě):

Nt $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ je posl. vektorů. Potom

$$\vec{x}^{(k)} \rightarrow \vec{x} \iff \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| \rightarrow 0$$

v lib. normě $\|\cdot\|$.

Dk: Z def. $\vec{x}^{(k)} \rightarrow \vec{x} \iff x_i^{(k)} \rightarrow x_i, \forall i \in \hat{n} \iff |x_i^{(k)} - x_i| \rightarrow 0 \iff \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_\infty = 0$.
Dále stačí použít ekvivalenci norem.

DEF (Maticová norma):

Norma na množině čtvercových matic řádu n je funkce, která každé matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ přiřazuje reálné číslo $\|\mathbb{A}\|$ splňující pro všechna $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $\|\mathbb{A}\| \geq 0 \wedge (\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = \mathbb{O})$,
- $\|\lambda \mathbb{A}\| = |\lambda| \|\mathbb{A}\|$,
- $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$,
- $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|$.

pozn. : Na maticovou normu se lze dívat jako na vektorovou normu aplikovanou na vektory, které mají n^2 složek, která navíc splň čtvrtý bod definice. Proto i tato normu splň větu o konvergenci vektorů v normě a konvergenci matic lze vyšetřovat pomocí norem.

Příkladem maticové normy je Schurova norma: $\|\mathbb{A}\|_S = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$

POSLOUPNOSTI VEKTORŮ A MATIC

DEF (Souhlasná maticová norma):

Maticová norma je souhlasná s danou vektorovou normou, platí-li pro lib. matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a lib. vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$.

$$\|\mathbb{A}\vec{x}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\vec{x}\|$$

pozn. : Schurova maticová norma je souhlasná s euklidovskou normou.

DEF (Indukovaná maticová norma):

Maticová norma indukovaná vektorovou normou je norma daná vztahem

$$\|\mathbb{A}\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|$$

VĚTA ():

Při značení:

- $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|_\infty,$
- $\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{\|\vec{x}\|_1=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|_1,$
- $\|\mathbb{A}\|_2 = \max_{\|\vec{x}\|_2=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|_2,$

pro každou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ platí násl. vztahy:

- $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i \in \hat{n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$
- $\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in \hat{n}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$
- $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}.$

DEF (Pozitivně definitní matice):

Čtvercová matice $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní, právě tehdy když $\forall \vec{x} \neq 0$ platí, že

$$\vec{x}^* \mathbb{A} \vec{x} \equiv (\mathbb{A} \vec{x}, \vec{x}) > 0,$$

znač. $\mathbb{A} > 0$. Je-li pro čtvercovou matici $\mathbb{B}$ matice $\mathbb{A} - \mathbb{B} > 0$, píšeme $\mathbb{A} > \mathbb{B}$.

POSLOUPNOSTI VEKTORŮ A MATIC

VĚTA ():

Všechna vlastní čísla PD matice $\mathbb{A}$ jsou kladná. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská matice s kladnými vlastními čísly, pak je PD.

Dk: i) vezm. $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ a k němu přísl. vl. vekt. $\vec{x}, \|\vec{x}\|_2 = 1$

$$0 < (\mathbb{A}\vec{x}, \vec{x}) = (\lambda\vec{x}, \vec{x}) = \lambda(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda$$

ii) $\mathbb{A}$ herm a $\lambda_i > 0, \forall i$

Schur: $\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U}, d_{ii} > 0^5, \forall i$

$$(\mathbb{A}\vec{x}, \vec{x}) = (\mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U} \vec{x}, \vec{x}) = (\mathbb{D} \mathbb{U} \vec{x}, \mathbb{U} \vec{x}) \equiv (\mathbb{D} y, y) = \sum_{i=1}^n d_{ii} |y_i|^2 > 0$$

pozn. : Fun fact, který je požadován u zkoušky, je ukázat, že diag. prvky PD matice jsou kladné. $0 < (\mathbb{A}\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \vec{e}_i^* \mathbb{A} \vec{e}_i = \vec{e}_i^* \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{ii}$

DEF (Mocnina PD hermitovské matice):

Nť $\mathbb{A}$ herm. a PD. Pro lib. $p \in \mathbb{R}$ def.

$$\mathbb{A}^p = \mathbb{U}^* \mathbb{D}^p \mathbb{U}$$

$$\mathbf{Dk:} \mathbb{A}^2 = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U} \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U} = \mathbb{U}^* \mathbb{D}^2 \mathbb{U}$$

DEF (Energetická vektorová a maticová norma):

Nť $\mathbb{A}$ herm. PD matice. Pak def energetickou vektorovou resp maticovou normu jako

$$\|\vec{x}\|_{\mathbb{A}} := \|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} \vec{x}\|_2, \|\mathbb{B}\|_{\mathbb{A}} := \|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} \mathbb{B} \mathbb{A}^{-\frac{1}{2}}\|_2$$

VĚTA ():

Nť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, potom platí

$$\mathbb{A}^k \rightarrow \mathbb{O} \iff \rho(\mathbb{A}) < 1$$

VĚTA ():

Postačující podmínka pro to, aby $\mathbb{A}^k \rightarrow \mathbb{O}$ pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je, že existuje maticová norma taková, že $\|\mathbb{A}\| < 1$.

⁵Matice $\mathbb{D}$ má na diag. vlastní čísla PD matice $\mathbb{A}$, která jsou kladná viz část (i)

POSLOUPNOSTI VEKTORŮ A MATIC

VĚTA ():

Absolutní hodnota lib. vl. čísla $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ je nejvýše rovna lib. normě dané matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$

VĚTA (Konvergence geometrické řady):

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby řada

$$\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \dots,$$

konvergovala je $\mathbb{A}^k \rightarrow \mathbb{O}$. Součtem této řady je pak matice

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$$

VĚTA (Chyba geometrické řady):

Je-li $\|\mathbb{A}\| < 1$ pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, pak

$$\|(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} - (\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \dots + \mathbb{A}^k)\| \leq \frac{\|\mathbb{A}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbb{A}\|}$$