

DIFR

Tento dokument je neoficiálním, soukromým studijním materiálem. Text představuje autorskou syntézu, shrnutí a osobní interpretaci témat probíraných na přednáškách prof. Dr. Ing. Beneše v LS 2025/2026. Nejedná se o oficiální výukový materiál ČVUT, o doslovný přepis přednášek ani o dílo schválené vyučujícím. Všechny ochranné známky, názvy předmětů a případné citované metodiky jsou vlastnictvím příslušných držitelů práv.

Text je poskytován bezúplatně, pro osobní studijní potřeby a bez jakýchkoliv záruk za správnost, úplnost či aktuálnost obsahu. Autor nenese v souladu s § 2950 zákona č. 89/2012 Sb., občanský zákoník, odpovědnost za jakoukoliv újmu (včetně neúspěchu u zkoušek či jiných studijních povinností), která by vznikla v důsledku spoléhání se na informace v tomto textu. Užití materiálů je výhradně na vlastní nebezpečí čtenáře.

Tímto prohlašuji, že jsem tento text vypracoval samostatně na základě vlastních poznámek pořízených v průběhu přednášek.

V Erlangen dne 15. srpna 2026

Obsah

Úvodní pojmy a definice	1
DEF (Obyčejný diferenciální výraz n-tého řádu):	1
DEF (Obyčejná diferenciální rovnice):	1
Existenční teorie	2
DEF (ODR v normálním tvaru):	2
DEF (Stejná omezenost):	2
DEF (Stejně spojitě funkce):	2
V (Arzelova):	3
K čemu potřebují japonští studenti v české restauraci číslo π a e ? .	4
V (Peanova):	5
Příklady k Peanově větě:	9
V (Osgoodova o jednoznačnosti):	10
Lokální existence a prodloužování řešení	12
DEF (Prodloužitelná funkce):	13
V (Kritéria neprodloužitelnosti):	13
(*) Lemma	14
V (Existence neprodloužitelného řešení):	16
V (Vyšší regularita řešení)	17
V (O spojitě závislosti na datech):	18
Lemma (Grönwall):	19
DEF (Soustava ODR 1. řádu)	20
V (Picardova):	21
Analytická řešení LDR	24
DEF (Soustava LDR 1. řádu):	24
DEF (LDR n-tého řádu):	24
DEF (Lineárně závislé fce na int I):	26
DEF (Wronskián):	26
V (Wronskián LZ funkcí):	26
V (*):	27
DEF (Fundamentální systém):	28
V (Řešení jako LK FS):	28
V (Liouvilleova-Abelova věta):	28
V (O existenci a jednoznačnosti LDR zadané FS):	29
V (O existenci FS):	30

OBSAH

LDR n-tého řádu s konst. koeficienty	31
LDR n-tého řádu s konst. koeficienty	31
V(O charakteristické rovnici):	31
V(O řešení pro různé kořeny):	31
V(O řešení pro násobné kořeny):	31
Soustavy lineárních DR 1. řádu	33
DEF (Soustavy lineárních DR 1. řádu):	33
V (Liouvilleova-Jacobiova věta pro soustavy):	33
V (Obdoba vět dříve):	34
V (FS pro (7)):	34
Okrajová úloha pro ODR 2. řádu	36
Typová úloha:	36
V (O jednoznačnosti):	39

Úvodní pojmy a definice

DEF (Obyčejný diferenciální výraz n-tého řádu):

Nt $F : \mathbb{R}^{2+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^{(p)}(\mathbb{R}^{2+n})$, $n, p \in \mathbb{N}_0$.

Pak výraz $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ se nazve obyč. dif. výraz n-tého řádu.

DEF (Obyčejná diferenciální rovnice):

Nt $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$ je obyč. dif. výraz, $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Pak

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \forall x \in I \quad (1)$$

se nazve obyč. dif. rcí n-tého řádu, pokud je $y^{(n)}$ v ní netriviálně přítomná.

Fce $y = y(x)$ řeší (1), když bodově platí $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$
 $\forall x \in I$.

Řešení $y = y(x)$ rovnice (1) je jednoznačné, pokud pro každé jiné řešení $z = z(x)$ na $J \supset I$ platí $(\forall x \in I \subset J)(y(x) = z(x))$

pozn. : Doplnující info pro (1):

1. Poč. podmínky: tj. hodnoty řešení, př. derivací pro (1) jsou zadány v jediném bodě $x_0 \in I : y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$
2. Okr. podmínky: tj. hodnoty $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ jsou zadávány v různých bodech I
3. Ostatní podmínky: např. integrální

pozn. : Rozlišujeme úpravy rnic (1):

- algebraické (*násobení, dělení ...*)
- funkční (*substituce*)

Řekneme, že DR1 je ekv. upravena na DR2, pokud se nezmění množina řešení.

$xy' = y^2 - y$ je bez omezení na hodnoty x, y, y' ,

po alg. úpravě $\frac{y'}{y^2-y} = \frac{1}{x}$ dostáváme omezení $x \neq 0, y^2 - y \neq 0$

tedy $y(x) \equiv 0$ a $y(x) \equiv 1$ řeší první, ale neřeší druhou DR

Existenční teorie

Budeme uvažovat rovnice v konkrétnějším tvaru než je (1)

DEF (ODR v normálním tvaru):

Nt $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ Rovnici

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

nazvu obyč. dif. rce v norm tvaru

Použitím podmínky $y(x_0) = y_0$ získáme poč. úlohu pro ODR v norm. tvaru.

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3)$$

na $I \subset \mathbb{R}$, kde I je interval

pozn. : Řešení (3) najdeme pomocí konstrukce vhodné fční posl. a prokázání její vhodné konvergence.

DEF (Stejná omezenost):

Nt $I \subset \mathbb{R}$ je omez. interval, $M = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je fce na } I\}$

Fce z M jsou stejně omez. na I, pokud

$$(\exists K > 0)(\forall f \in M)(\forall x \in I)(|f(x)| \leq K)$$

DEF (Stejně spojitě funkce):

Fce z M jsou stejně spojitě, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta)(\forall f \in M)(|f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$$

pozn. : Víme z Bolzano-Weistrasse, že každá omezená posl vektorů LP konečné dim. má konvergentní podposloupnost.

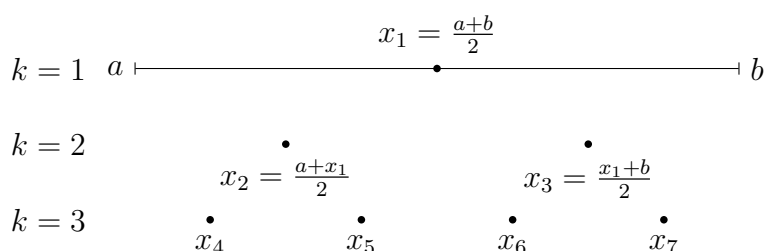
EXISTENČNÍ TEORIE

V (Arzelova):

Nt $I \subset \mathbb{R}$ je omez. interval, M je mn. stejně omez., stejně spoj. fcí na I .
Pak z každé posl. $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ lze vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost na I .

Dk:

Krok 1: Konstrukce spočetné množiny $\mathcal{P}$ na intervalu $I = (a, b)$



Celkem vznikne spočetná množina $\mathcal{P} = \{x_1, x_2, \dots\}$ s vlastností (P):
 $(\forall x^* \in I)(\forall \varepsilon_0 > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\frac{b-a}{2^K} < \varepsilon_0 \wedge \exists l \in \mathbb{N} : x_l \in \mathcal{P} \cap (x^* - \varepsilon_0, x^* + \varepsilon_0))$

Krok 2: Posloupnost $\{g_n\}$ vyčíslíme v bodech z množiny $\mathcal{P}$

$l=1$: vyčíslíme $\{g_n(x_1)\}$:

g_n jsou stejně omezené fce $\Leftrightarrow (\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(|g_n(x)| \leq K)$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(-K \leq g_n(x_1)) \leq K)$, tzn. $(\forall n \in \mathbb{N})(g_n(x_1) \in [-K, K])$
spec. pro x_1

$\Rightarrow \exists$ vybraná konvergentní podposloupnost ozn. $\{g_n^{(1)}(x_1)\}$
Bolz.-Weie.

vzniká vybraná fční podposl. $\{g_n^{(1)}(x)\}$, která v $x = x_1$ konverguje (bodově)

$l=2$: vyčíslíme $\{g_n^{(1)}(x_2)\}$:

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(-K \leq g_n(x_2)) \leq K)$, tzn. $(\forall n \in \mathbb{N})(g_n^{(1)}(x_2) \in [-K, K])$
spec. pro x_2

$\Rightarrow \exists$ vybraná konvergentní podposloupnost z $\mathbf{g}_n^{(1)}(\mathbf{x}_2)$ ozn. $\{g_n^{(2)}(x_2)\}$
Bolz.-Weie.

vzniká vybraná fční podposl. $\{g_n^{(2)}(x)\}$, která v $x = x_1, x = x_2$ konverguje (bodově)

$l = l_0$: vyčíslíme $\{g_n^{(l_0-1)}(x_{l_0})\}$:

$\Rightarrow \exists$ vybraná konvergentní podposloupnost ozn. $\{g_n^{(l_0)}(x_{l_0})\}$
Bolz.-Weie.

vzniká vybraná fční podposl. $\{g_n^{(l_0)}(x)\}$, která v $x \in \{x_1, \dots, x_{l_0}\}$ konverguje (bodově)

EXISTENČNÍ TEORIE

Krok 3: Diagonální výběr: uvažme posl. $\{g_n^{(n)}(x)\}$

trvzení: Posloupnost $\{g_n^{(n)}(x)\}$ konverguje na I stejnoměrně

dk: chci B-C: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(|g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_n^{(n)}(x)| < \varepsilon)$

pro pevné $x = x_{l_0}$ číselná posl. $\{g_n^{(n)}(x)\}_{n=l_0}^\infty$ konverguje

proto pro lib. $l \in \mathbb{N} : |g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_n^{(n)}(x)| \leq \{\pm g_{n+p}^{(n+p)}(x_l) \pm g_n^{(n)}(x_l)\}$

$$\underbrace{|g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_{n+p}^{(n+p)}(x_l)|}_{(1)} + \underbrace{|g_{n+p}^{(n+p)}(x_l) - g_n^{(n)}(x_l)|}_{(2)} + \underbrace{|g_n^{(n)}(x_l) - g_n^{(n)}(x)|}_{(3)}$$

(2): bodová konvergence $\{g_n^{(n)}(x_l)\}$ pro pevné $x = x_l$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(|g_{n+p}^{(n+p)}(x_l) - g_n^{(n)}(x_l)| < \frac{\varepsilon}{3})$$

(1) a (3): stejná spojitost $\{g_n^{(n)}(x)\}_{n=1}^\infty$:

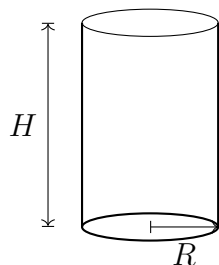
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta)(\forall n \in \mathbb{N})(|g_n(x') - g_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{3})$$

Dále zvol. za $x' \equiv x$, $x'' \equiv x_l$ a z vlastnosti $\mathcal{P}$ pro $\delta > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$, pro $x = x^*$, $\exists l \in \mathbb{N}$, tak, že x_l je mezi body $\mathcal{P}$ na úrovni iterace k ($\frac{b-a}{2^k} < \delta$). tj. $(\exists M \in \mathbb{N})(\text{body } x_1, \dots, x_M \text{ mají mezi sebou vzdálenost } \frac{b-a}{2^k})$.

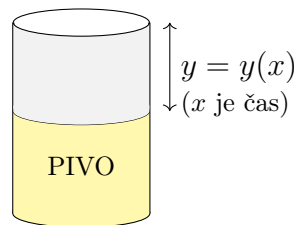
Pak bereme v s.s. $x_l \in \{x_1, \dots, x_M\}$ a v b. konv. zvol. $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_M\}$

$$(1) + (2) + (3) \leq \varepsilon \implies \text{BC podmínka platí a } \exists g_n : I \rightarrow \mathbb{R}, g_n^{(n)} \xrightarrow{I} g.$$

K čemu potřebují japonští studenti v české restauraci číslo π a e ?



Sklenice od piva



Detail pěny

Uvažujme úbytek výšky pěny $y(x)$ v čase x . Předpokládáme, že rychlost rozpadu je přímo úměrná aktuálnímu množství pěny:

$$y' = -\alpha y, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad y(0) = y_0 \quad (0)$$

Numerický přístup (Diskretizace):

Zvolíme dělicí body času $x_k = kh$, kde h je délka kroku. Nahradíme derivaci $y'(x_k)$ diferencí:

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -\alpha y_k \implies y_{k+1} = (1 - \alpha h)y_k$$

EXISTENČNÍ TEORIE

Pro k -tý krok dostáváme rekurentní vztah:

$$y_m = (1 - \alpha h)^{k+1} y_0 \quad (\Delta)$$

Vztah (0) a (Δ):

Zvolme pevný čas x^* a rozdělme interval $[0, x^*]$ na m bloků o velikosti $h = \frac{x^*}{m}$. Pak aproximace y_m v čase x^* vypadá takto:

$$y_{k+1} = \left(1 - \alpha \frac{x^*}{m}\right)^m y_0 = \left[\left(1 - \frac{\alpha x^*}{m}\right)^{\frac{m}{\alpha x^*}}\right]^{\alpha x^*} y_0 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} e^{-\alpha x^*} y_0$$

Závěr:

Číslo π potřebují k výpočtu objemu válcové sklenice ($V = \pi R^2 h$) a Eulerovo číslo e k popisu toho, jak jim ta pěna před očima mizí (exponenciální rozpad).

V (Peanova):

Nt $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\Gamma)$, $[x_0, y_0] \in \Gamma$

Pak $\exists a_0 > 0$ a zobr. $\varphi : [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \rightarrow \mathbb{R}$, která řeší (3)

Krok 1: Konstrukce uz. množiny kolem bodu $[x_0, y_0]$:

$$[x_0, y_0] \in \Gamma \xrightarrow{\Gamma \subset \mathbb{R}^2} (\exists \rho_0) (B = \overline{B_{[x_0, y_0]}(\rho_0)} \in \Gamma).$$

B je uzavřená a omezená, $B \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{Heine-Bor.} \Rightarrow$

B kompakt.

$f \in C(\Gamma)$ tj. i $f \in C(B)$, B komp. $\Rightarrow$

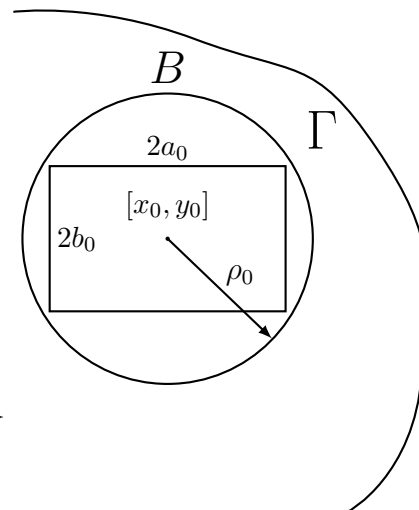
f nabývá sup a inf, tedy je omezená:

$$(\exists M > 0)(\forall [x, y] \in B)(|f(x, y)| \leq M).$$

Pak zvolíme obdélník $\mathcal{O}$

$$\mathcal{O} = \{[x, y] \in B \mid |x - x_0| \leq a_0, |y - y_0| \leq b_0\}$$

tak, aby $a_0 M \leq b_0$. (*)



Krok 2: Konstrukce posl. tzv. Eulerových lomených čar

Pro $m \in \mathbb{N}$ rozdělíme $[x_0, x_0 + a_0]$ na m stejných částí pomocí bodů $x_k = x_0 + kh$, $h = \frac{a_0}{m}$ (anal. pro $[x_0 - a_0, x_0]$). Nahradíme derivaci

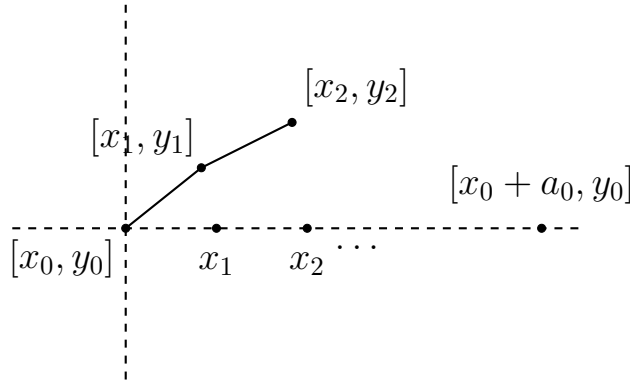
$y'(x_0) \sim \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$ diferencí, odtud $y(x_1) \sim y(x_0) + hf(x_0, y_0)$. Ozn. $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ aproximaci $y(x_1)$.

Anal. $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \dots, y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), j \in \widehat{m-1}$

EXISTENČNÍ TEORIE

Def. Eulerovu lomenou čáru:

$\varphi_m(x) = y_j + \overbrace{(x - x_j)f(x_j, y_j)}^{\approx h}$ pro $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j \in \widehat{m-1}$ Tím vzniká fční posl. $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ def. na $[x_0, x_0 + a_0]$, zrcadlově zopakujeme též pro $[x_0 - a_0, x_0]$, a získáme posl. na celém $[x_0 - a_0, x_0 + a_0]$



Krok 3: vlastnosti $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$:

lemma: Posl. $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ obsah. stejně omez. fce

dk: Odhadujeme $|\varphi_m(x) - y_0| =$

$$\{x \in [x_0, x_1]\} = |y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0) - y_0| = \underbrace{|(x - x_0)|}_{\leq h} \underbrace{|f(x_0, y_0)|}_{\leq M}$$

$$\leq \underbrace{h}_{\leq a_0} M \leq a_0 M \leq b_0$$

$$\{x \in [x_1, x_2]\} = |y_1 + (x - x_1)f(x_1, y_1) - y_0| \stackrel{\Delta}{\leq} \underbrace{|y_1 - y_0|}_{\leq hM} + \underbrace{|(x - x_1)f(x_1, y_1)|}_{\leq h \cdot M}$$

$$\leq \underbrace{2h}_{\leq a_0} M \leq a_0 M \leq b_0$$

$\vdots$

$$\{x \in [x_j, x_{j+1}]\} = |y_j + (x - x_j)f(x_j, y_j) - y_0| \stackrel{\Delta}{\leq} \underbrace{|y_j - y_0|}_{\leq jhM} + \underbrace{|(x - x_j)f(x_j, y_j)|}_{\leq h \cdot M}$$

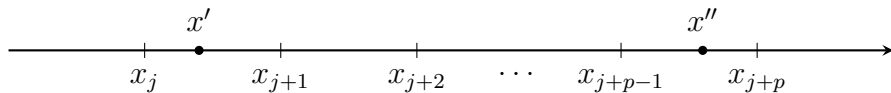
$$\leq \underbrace{(j+1)h}_{\leq a_0} M \leq a_0 M \leq b_0$$

Dostáváme $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [x_0, x_0 + a_0])(|\varphi_m(x) - y_0| \leq b_0) \iff$

$$-b_0 \leq \varphi_m(x) - y_0 \leq b_0 \iff -b_0 + y_0 \leq \varphi_m(x) \leq b_0 + y_0 \implies |\varphi_m(x)| \leq |y_0| + b_0$$

EXISTENČNÍ TEORIE

lemma: Posl. $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ obsah. stejně spoj. fce



dk: Chceme: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in [x_0 - a_0, x_0 + a_0], |x' - x''| < \delta)$
 $(\forall m \in \mathbb{N})(|\varphi_m(x') - \varphi_m(x'')| < \varepsilon)$

$$|\varphi_m(x') - \varphi_m(x'')| = |\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| = \text{přičtu chytrou nulu}$$

$$|\varphi_m(x'') - y_{j+p-1} + y_{j+p-1} - y_{j+p-2} + y_{j+p-2} - \dots - y_{j+1} + y_{j+1} - \varphi_m(x')| \stackrel{\Delta}{\leq}$$

$$\underbrace{|\varphi_m(x'') - y_{j+p-1}|}_{(p-1)} + \underbrace{|y_{j+p-1} - y_{j+p-2}|}_{(p-2)} + \dots + \underbrace{|y_{j+2} - y_{j+1}|}_{(1)} + \underbrace{|y_{j+1} - \varphi_m(x')|}_{(0)} \quad (\square)$$

$$(\mathbf{p} - \mathbf{1}) : x'' \in [x_{j+p-1}, x_{j+p}] \Rightarrow |\varphi_m(x'') - y_{j+p-1}| =$$

$$|y_{j+p-1} + (x'' - x_{j+p-1}) \underbrace{f(x_{j+p-1}, y_{j+p-1})}_{\leq M} - y_{j+p-1}| \leq (x'' - x_{j+p-1})M$$

$$(\mathbf{1}) - (\mathbf{p} - \mathbf{2}) : l \in \widehat{p-2} : |y_{j+l+1} - y_{j+l}| = |h \underbrace{f(x_{j+l}, y_{j+l})}_{\leq M}| \leq hM$$

$$(\mathbf{0}) : x' \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow |y_{j+1} - \varphi_m(x)| =$$

$$|y_j + hf(x_j, y_j) - (y_j + (x' - x_j)f(x_j, y_j))| = |(h - x' + x_j)f(x_j, y_j)|$$

$$\stackrel{x_j + h = x_{j+1}}{=} \underbrace{|(x_{j+1} - x')f(x_j, y_j)|}_{\leq M} \leq (x_{j+1} - x')M$$

$$(\square) \leq (x'' - x_{j+p-1})M + \underbrace{hM + \dots + hM}_{(p-2) \text{ krát}} + (x_{j+1} - x')M = (x'' - x')M$$

celkem $|\varphi_m(x') - \varphi_m(x'')| \leq |x'' - x'|M \leq \varepsilon$, pro $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

pozn: $\{\varphi_m\}$ je stejně omez. a stejně spoj. na omez. int. $[x_0 - a_0, x_0 + a_0] \xrightarrow{\text{Arzelò}}$
 $\exists$ vybraná posl. $\{\varphi_{k_m}\}_{m=1}^\infty : \varphi_m \rightrightarrows \varphi^*$ na $[x_0 - a_0, x_0 + a_0]$

Krok 4: φ^* řeší (3)

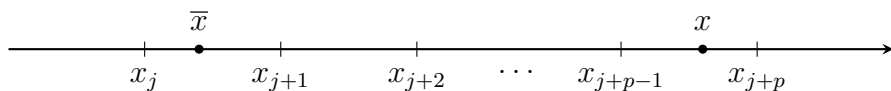
lemma: fce φ^* řeší (3) na $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$

dk: a) φ^* splň. poč. podm. $y(x_0) = y_0 : (\forall m \in \mathbb{N})(\varphi_m(x_0) = y_0) \checkmark$

b) $y' = f(x, y) \Leftrightarrow |y' - f(x, y)| < \varepsilon : \text{ukážeme } (\forall \bar{x} \in (x_0 - a_0, x_0 + a_0))$

$$(\forall \bar{\varepsilon} > 0)(\exists \bar{\delta} > 0)(\forall x, |x - \bar{x}| < \bar{\delta})(\underbrace{|\frac{\varphi^*(x) - \varphi^*(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f(\bar{x}, \varphi^*(\bar{x}))|}_{?} < \bar{\varepsilon}) \quad / \cdot |x - \bar{x}|$$

$$|\varphi^*(x) - \varphi^*(\bar{x}) - (x - \bar{x})f(\bar{x}, \varphi^*(\bar{x}))| < \bar{\varepsilon}$$



EXISTENČNÍ TEORIE

Místo φ^* zkoumejme napřed φ_m :

$$\begin{aligned}
 |\varphi_m(x) - \varphi_m(\bar{x}) - (x - \bar{x})f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))| &= \underbrace{|\varphi_m(x) - \varphi_m(\bar{x})|}_{y_{j+p-1} + h f(x_{j+p-1}, y_{j+p-1})} + \underbrace{y_{j+p-1} - \varphi_m(\bar{x})}_{y_{j+p-1} + h f(x_{j+p-1}, y_{j+p-1})} - y_{j+p-2} \\
 &+ \dots + \underbrace{y_{j+2} - y_{j+1}}_{y_{j+1} + h f(x_{j+1}, y_{j+1})} + \underbrace{y_{j+1} - \varphi_m(\bar{x})}_{y_{j+1} + h f(x_{j+1}, y_{j+1})} - \underbrace{(x - \bar{x})}_{(x - x_{j+p-1}) + h + \dots + h + (x_{j+1} - \bar{x})} f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x})) \\
 &= |(\bar{x} + \bar{h} - x_{j+p-1}) - x_{j+p-1}| \\
 &+ (f(x_{j+p-1}, y_{j+p-1}) - f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))) + h(f(x_{j+p-2}, y_{j+p-2}) - f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))) + \dots + \\
 &h(f(x_{j+1}, y_{j+1}) - f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))) + (x_{j+1} - \bar{x})(f(x_j, y_j) - f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))) \stackrel{\Delta}{\leq}
 \end{aligned}$$

pozn: $B = \bar{B} \subset \Gamma$ a $f \in C(B) \implies f$ je na B spoj. stejnoměrně
 tj. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0 > 0)(\forall (x', y'), (x'', y'') \in B)(|x' - x''| < \delta_0, |y' - y''| < \delta_0)$
 $(|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon)$. Navíc je $\{\varphi_m\}$ stejně spoj. tj. pro $\delta_0 > 0 \exists \delta_1 > 0$:
 pro $x', x'', |x' - x''| < \delta_1 \implies |\varphi_m(x') - \varphi_m(x'')| < \delta_0$. Ozn. $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$,
 pak pro $|h| = |x - \bar{x}| < \delta$ platí:

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{\Delta}{\leq} (\bar{x} + \bar{h} - x_{j+p-1})|f(x_{j+p-1}, y_{j+p-1}) - f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))| + h|f(x_{j+p-2}, y_{j+p-2}) - \\
 &f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))| + \dots + h|f(x_{j+1}, y_{j+1}) - f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))| + (x_{j+1} - \bar{x})|f(x_j, y_j) - \\
 &f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))| < (\bar{x} + \bar{h} - x_{j+p-1} + h + \dots + h + x_{j+1} - \bar{x})\varepsilon = \bar{h}\varepsilon
 \end{aligned}$$

tj. $(\forall \varepsilon > 0)(\forall (x_0 - a_0, x_0 + a_0))(\forall |h| = |x - x'| < \delta)(\forall m \in \mathbb{N})$

$$(|\varphi_m(\underbrace{\bar{x} + \bar{h}}_x) - \varphi_m(\bar{x}) - \bar{h}f(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}))| < \varepsilon) \xrightarrow{\text{pro vybrané } k_m \rightarrow \infty}$$

$$(|\varphi^*(\bar{x} + \bar{h}) - \varphi^*(\bar{x}) - \bar{h}f(\bar{x}, \varphi^*(\bar{x}))| < \varepsilon)$$

pozn: $\{\varphi_n\}$ jsou stejně omez. a stejně spoj. fce na $[x_0 - a_0, x_0 + a_0]$

a zde také konverguje $\varphi_{k_n} \xrightarrow{[x_0 - a_0, x_0 + a_0]} \varphi^*$ a f má potřebné vlastnosti na B , tj.

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left(\frac{\varphi^*(x) - \varphi^*(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f(\bar{x}, \varphi^*(\bar{x})) \right) = 0 \text{ i jednostranně v bodech } x_0 - a_0, x_0 + a_0.$$

Tedy: φ^* splňuje (3) na $[x_0 - a_0, x_0 + a_0]$

EXISTENČNÍ TEORIE

Příklady k Peanově větě:

Existence bez jednoznačnosti (Peano's brush) ¹

Uvažujme ODR v normálním tvaru $y' = f(x, y)$:

$$y' = \sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Funkce $f(x, y) = y^{2/3}$ je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$, čímž jsou naplněny předpoklady Peanovy věty a existence řešení je tak zaručena. Jelikož je však spojitost pouze podmínkou postačující pro existenci, nikoliv pro jednoznačnost, a daná funkce není v počátku lokálně lipschitzovská, připouští tato úloha nekonečně mnoho řešení.

Vedle triviálního řešení $y = 0$ existuje nenulová větev $y = \frac{1}{27}(x-C)^3$, přičemž jejich libovolné kombinace vytvářejí útvar zvaný *Peano's brush*.

Nespojitá fce (Peano jako implikace)

Uvažujme počáteční úlohu s počáteční podmínkou:

$$y' = \operatorname{sgn}(y) \quad y(x_0) = y_0$$

Snadno ověříme jednoznačnost integrací: pro libovolný bod $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ dostáváme:

- Pro $y_0 > 0$: $y' = 1 \implies y(x) = x - x_0 + y_0$ pro $x > x_0 - y_0$.
- Pro $y_0 < 0$: $y' = -1 \implies y(x) = -(x - x_0) + y_0$ pro $x > x_0 + y_0$.
- Pro $y_0 = 0$: $y(x) = 0$ je řešením pro $x \in \mathbb{R}$.

Výpočtem jsme ověřili existenci i jednoznač. řešení pro všechna $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$. Ačkoliv řešení existuje, funkce $f(x, y) = \operatorname{sgn}(y)$ není spojitá ($f \notin C(\mathbb{R}^2)$), tudíž nejsou splněny požadavky Peanovy věty. Pokud není splněn předpoklad spojitosti, věta "mlčí" a o existenci či jednoznačnosti řešení nic nevypovídá; ty jsou zde důsledkem jiných vlastností systému, nikoliv aplikací Peanova tvrzení.

¹Delší text byl napsán pomocí LLM, autor byl líný psát, ale vesměs souhlasí s formulací

EXISTENČNÍ TEORIE

V (Osgoodova o jednoznačnosti):

Nt' $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, dále nt' $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\Gamma)$ má vlastnost:

$$(\forall [x, y_1], [x, y_2] \in \Gamma)(|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \Phi(|y_2 - y_1|)), \quad (o)$$

kde $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je fce spojitá a kladná na $\mathbb{R}^+$, $\Phi(0) = 0$.

Dále nt' pro nějaké $c > 0$ je $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^c \frac{du}{\Phi(u)} = +\infty$.

Pak poč. úloha (3) má nejvýše jedno řešení.

Dk:

Nt' $\varphi = \varphi(x)$ řeší (3) na $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

$$\varphi(x_0) = y_0$$

a $\psi = \psi(x)$ řeší (3) na $(x_0 - a_1, x_0 + a_1)$

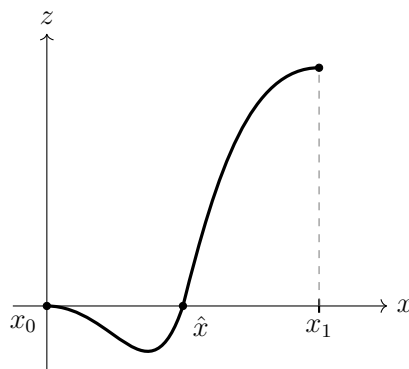
$$\psi'(x) = f(x, \psi(x))$$

$$\psi(x_0) = y_0$$

Ozn. $z = z(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ a předp.

$$(\exists x_1 > x_0)(z(x_1) = \varphi(x_1) - \psi(x_1) > 0),$$

pak $(\exists \hat{x} \in [x_0, x_1])(\forall x \in [\hat{x}, x_1])(z(x) > 0)$.



$$z'(x) = f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) \leq \Phi(\varphi(x) - \psi(x)) = \Phi(z(x)) \text{ pro } x \in (\hat{x}, x_1]$$

pro (o): $z'(x) \leq \Phi(|z(x)|)$ a pro $x \in [\hat{x}, x_1]$ platí $\frac{z'(x)}{\Phi(z(x))} \leq 1$ $\int_{x_0}^{x_1} \frac{z'(x)}{\Phi(z(x))} dx \leq \int_{x_0}^{x_1} 1 dx = x_1 - x_0$

$$z(\hat{x}) = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{z'(x)}{\Phi(z(x))} dx \leq (x_1 - x_0), \text{ subst. } u = z(x):$$

$$\int_{z(x_0)}^{z(x_1)} \frac{du}{\Phi(u)} \leq (x_1 - x_0), x \rightarrow \hat{x}_+ \Rightarrow z(x) \rightarrow z(\hat{x}) = 0_+$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}_+} \int_{z(x)}^{z(x_1)} \frac{du}{\Phi(u)} \leq (x_1 - \hat{x}) \ni \mathbb{R} \text{ spor s předp. } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^c \frac{du}{\Phi(u)} = +\infty.$$

EXISTENČNÍ TEORIE

pozn. : Jak bude vypadat fce Φ ?

$$1. \Phi(u) = ku, u \in \mathbb{R}_0^+, k > 0 : \int_{\varepsilon}^{c_1} \frac{du}{ku} = \frac{1}{k} \ln \frac{c_1}{\varepsilon} = +\infty$$

$$2. \Phi(u) = ku |\ln u|, u \in \mathbb{R}_0^+, k > 0 :$$

$$\int_{\varepsilon}^{c_1} \frac{du}{ku |\ln u|} \stackrel{\text{nt } c_1 > 0}{=} \{v = \ln u\} = \left| \frac{1}{k} \int_{|\ln \varepsilon|}^{|\ln c_1|} \frac{dv}{|v|} \right| = \frac{1}{k} \int_{\varepsilon}^{c_1} \frac{dv}{v} = \frac{1}{k} \frac{|\ln \varepsilon|}{|\ln c_1|} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty$$

pozn. : Souvislost Osgoodovy podmínky a lokální lipschitzovskosti

Uvažujme volbu funkce Φ ve tvaru $\Phi(u) = ku$.

Nt' navíc $f(x, y)$ má v Γ spojitou parciální derivaci podle y , tj. $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Gamma)$.

Nt' $[x_0, y_0] \in \Gamma$, zvolme komp. $B = \overline{B([x_0, y_0], \rho_0)}$, dále nt' $[x, y_1], [x, y_2] \in B$.

Ozn. $g(s) = f(x, y_1 + s(y_2 - y_1))$,

z předp. $g \in C^{(1)}([0, 1]) \implies$

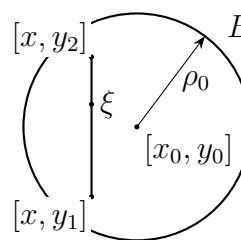
$$g(1) - g(0) = f(x, y_2) - f(x, y_1) =$$

$$g'(\xi)(1-0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + \xi(y_2 - y_1))(y_2 - y_1),$$

kde $\xi \in (0, 1)$.

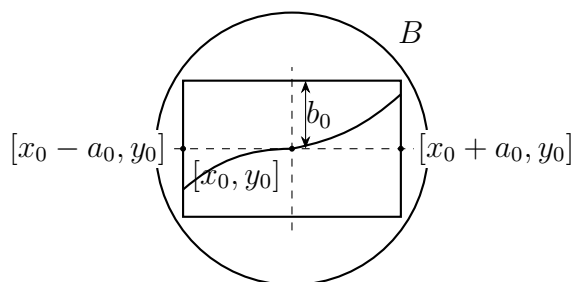
$\frac{\partial f}{\partial y} \in C(B)$ a B komp. $\implies \exists K > 0 :$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq K$$



Pak $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K|y_2 - y_1| \dots$ tzv. *lokální lipschitzovskost f vzhledem k y*.

pozn. : Rozsah def. oboru řešení $\varphi = \varphi(x)$, které zaručuje Peanova věta je lokální, tj. $\varphi : [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \rightarrow [y_0 - b_0, x_0 + b_0]$



EXISTENČNÍ TEORIE

Lokální existence a prodlužování řešení

$$1) \text{ Lineární ODR: } \left. \begin{array}{l} y' = ay, \quad a \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}, \text{ pro } x \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ Separovatelné ODR: } \left. \begin{array}{l} y' = 1 + y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{1+z^2} = x - x_0$$

$$\text{Výpočtem získáme řešení: } y(x) = \tan \underbrace{\left(x - x_0 + \arctan y_0 \right)}_{\in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}}$$

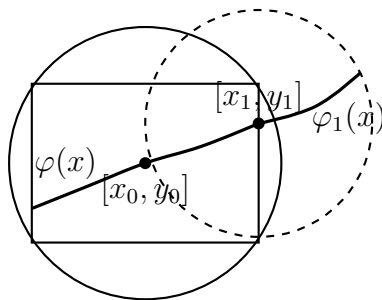
Hodnota $k \in \mathbb{Z}$ je určena tak, aby poč. podm. y_0 ležela v příslušné větvi $\tan$, tedy $y_0 \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$. Skutečný definiční obor řešení je otevřený interval $\left(x_0 - \frac{\pi}{2} + k\pi, x_0 + \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$. Peanova věta však garantuje existenci pouze na uzavřeném int. $[x_0 - a_0, x_0 + a_0]$, který může být (a často bývá) menší.

Úloha nám dává **otevřený** interval, zatímco Peano jen **uzavřený**. Musíme se tedy zabývat možností rozšíření (prodloužení) lokálního řešení. Vezm. hodnoty řešení na konci $y_1 = \varphi(x_0 + a_0)$ a použijme je jako nové poč. podm.,
 $\hat{y}_1 = \varphi(x_0 - a_0)$

$$\text{ozn. } x_1 = x_0 + a_0 \text{ a zpracujme poč. úlohu } \begin{array}{l} y_1 = \varphi(x_0 + a_0) \\ \hat{y}_1 = \varphi(x_0 - a_0) \end{array} \quad (3)_1$$

Dle Peanovy věty existuje okolí $B_1 = B([x_1, y_1], \rho_1)$ a nové řešení $\varphi_1(x)$ na intervalu $[x_1 - a_1, x_1 + a_1]$. Tímto jsme provedli tzv. **prodloužení doprava** (anal. doleva). Tento postup lze opakovat: vznikají řešení φ_k na intervalech $[x_k, x_k + a_k]$, čímž se původní řešení $\varphi(x)$ rozšiřuje na sjednocený interval $[x_0 - a_0, x_k + a_k], k \in \mathbb{N}$.

Tím vzniká otázka: Kdy a jak toto prodlužování skončí? (Např. nárazem na hranici definičního oboru funkce nebo únikem řešení do nekonečna.)



EXISTENČNÍ TEORIE

DEF (Prodloužitelná funkce):

Nt $\varphi = \varphi(x)$ řeší úlohu (3) na int. $[\alpha, \beta]$, kde $x_0 \in [\alpha, \beta]$

Řekneme, že φ je prodloužitelná doprava (anal. doleva),

pokud $\exists$ řešení $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ úlohy (3) na $[\alpha_1, \beta_1]$, kde $\alpha_1 \leq \alpha$ a $\beta_1 > \beta$

tak, že $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ pro $x \in [\alpha, \beta]$

Řešení je neprodloužitelné doprava, pokud není prodloužitelné doprava (nelze prodloužit za β)

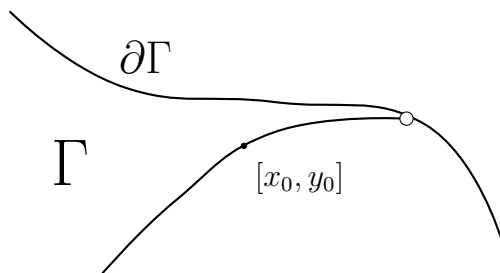
V (Kritéria neprodloužitelnosti):

Nt $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $[x_0, y_0] \in \Gamma$, $f \in C(\Gamma)$.

Řešení $\varphi = \varphi(x)$ úlohy (3) je na int. (α, β) , $x_0 \in (\alpha, \beta)$ neprodlouž.

doprava $\iff$ platí alespoň jedna z násl. podmínek:

1. $\beta = +\infty$
2. $\varphi(x)$ na levém okolí β není omez.
3. $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \rho([x, \varphi(x)] | \partial\Gamma) = 0$



Dk:

1) $(\Leftarrow)$: $\beta = +\infty$ nenajdu větší β_1 , a tedy z def. neprodlouž.

2) $(\Leftarrow)$: tvrzení budeme dokazovat obrácenou implikací, tedy předp., že φ lze prodloužit $\Rightarrow \varphi$ lze vyčíslit v $x = \beta \Rightarrow [\beta; \varphi(\beta)] \in \Gamma \Rightarrow \varphi, \varphi'$ spoj. v $x = \beta \Rightarrow \varphi$ omez. na okolí β

3) $(\Leftarrow)$: předp., že φ lze prodloužit $\Rightarrow [x, \varphi(x)]|_{x=\beta}$ lze použít jako poč. podm. pro prodlužování doprava, tj $[\beta, \varphi(\beta)] \in \Gamma$. Víme, že metrika ρ je spojitá $\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \rho([x; \varphi(x)] | \partial\Gamma) = \rho([\beta; \varphi(\beta)] | \partial\Gamma) \Rightarrow [\beta; \varphi(\beta)] \in \overline{\partial\Gamma}$,

$\partial\Gamma = \overline{\Gamma} \cap \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ je uz. $\Rightarrow [\beta; \varphi(\beta)] \in \partial\Gamma$ spor ($\Gamma \cap \partial\Gamma = \emptyset$)

EXISTENČNÍ TEORIE

($\Rightarrow$) Důkaz provedeme sporem pro všechna kritéria najednou.

Nt' $\varphi = \varphi(x)$ je neprodlouž. řešení a zároveň platí $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$

Z $\neg(1) : \beta \in \mathbb{R} \ (\beta = -\infty \text{ triv.})$, podle lemmatu (*) $y = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x) \in \mathbb{R}$

Z $\neg(3) = \neg(\lim_{x \rightarrow \beta^-} \rho([x, \varphi(x)], \partial\Gamma) = 0) \Rightarrow \lim$ buď neexistuje, nebo má jinou hodnotu. Ze spojitosti ρ pak $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \rho([x, \varphi(x)], \partial\Gamma) = \rho([\beta, y], \partial\Gamma)$, tzn. $\lim$

$\exists$. (a má jinou hodn.). Ozn. $0 < \rho_0 \equiv \lim_{x \rightarrow \beta^-} \rho([x, \varphi(x)], \partial\Gamma) = \rho([\beta, y], \partial\Gamma)$ z toho rovnou plyne $[\beta, y] \in \Gamma \Rightarrow [\beta, y]$ lze použít jako poč. podm. (3) a řešení φ tak prodloužit - spor.

(*) Lemma

Nt' platí předp. Peanovy věty, φ je neprodlouž. doprava na (α, β) , $x_0 \in (\alpha, \beta)$ a platí $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$. Potom $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x)$ existuje a je reálná.

Dk: Předp. $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ je oblast, $[x_0, y_0] \in \Gamma$, $f \in C(\Gamma)$, φ neprodl. doprava, $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$. Sporem nt' dále neex. $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x)$

Z $\neg(1) : \beta < +\infty$, $\neg(2) : \varphi$ je na okolí β^- omez. Ozn. dále:

$$\pi = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (\alpha, \beta) \mid x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta^-\}$$

$$P = \inf \{\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \mid \{x_n\} \in \pi\}$$

$$Q = \sup \{\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \mid \{x_n\} \in \pi\}$$

Snadno se pomocí Heineho ujistíme, že $P < Q$ a z omezenosti φ na okolí β plyne $-\infty < P < Q < +\infty$. Dále si promyslíme násl. kroky:

1) Hodnoty $\varphi(x)$ jsou poblíž P i Q

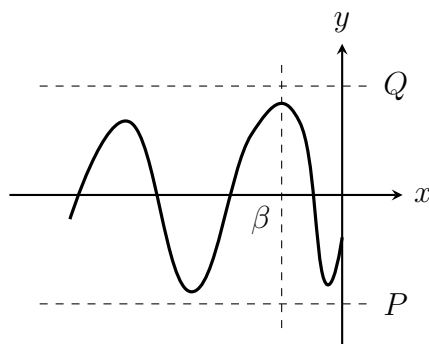
Pro $\tilde{\varepsilon} > 0$:

$(\exists \{\widetilde{x_n}\}, \{\widetilde{\widetilde{x_n}}\} \in \pi)(\liminf \varphi(\widetilde{x_n}) \in [P, P + \tilde{\varepsilon})$,

$\limsup \varphi(\widetilde{\widetilde{x_n}}) \in (Q - \tilde{\varepsilon}, Q] \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists n_0)$

$(\forall n > n_0)(\varphi(\widetilde{x_{k_n}}) \in [P, P + \tilde{\varepsilon}) \wedge \varphi(\widetilde{\widetilde{x_{k_n}}}) \in$

$(Q - \tilde{\varepsilon}, Q])$, kde $\widetilde{x_{k_n}} \rightarrow \beta^-$, $\widetilde{\widetilde{x_{k_n}}} \rightarrow \beta^-$



tím fce $\varphi(x)$ nabývá i všech hodnot mezi $P + \tilde{\varepsilon}$ a $Q - \tilde{\varepsilon}$

EXISTENČNÍ TEORIE

2) Všechny body z úsečky $\{\beta\} \times [P, Q]$ jsou pro graf φ hromadné

tzn. $(\forall y_0 \in [P, Q])([\beta; y_0] \text{ je hromadný bod}) : y_0 \in [P, Q] :$

- $y_0 = P, Q$ viz (1)
- $y_0 \in (P, Q) \Rightarrow$ zvolme $\tilde{\varepsilon} : P + \tilde{\varepsilon} < y_0 < Q - \tilde{\varepsilon}$

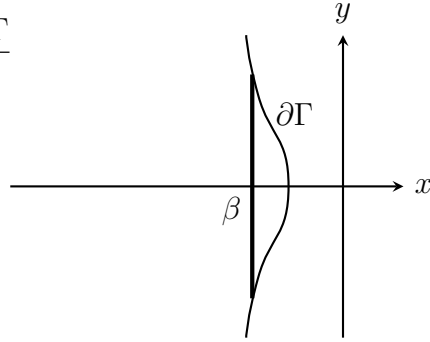
Pak pro dvojici $[\widetilde{x_{k_n}}; \varphi(\widetilde{x_{k_n}})], [\widetilde{x_{k_n}}; \varphi(\widetilde{x_{k_n}})] \exists \hat{x}_n$ tak, že $\varphi(\hat{x}_n) = y_0 \wedge \hat{x}_n \rightarrow \beta^-$
 $\Rightarrow [\hat{x}_n, \varphi(\hat{x}_n)] \rightarrow [\beta, y_0]$

3) Úsečka $U = \{\beta\} \times [P, Q]$ neleží celá v $\partial\Gamma$

Γ je def obor. f pro $y' = f(x, y)$,
 $y(x_0) = y_0$

Γ je oblast, $[x_0, y_0] \in \Gamma$. Dále dle (2)

$\rho([x, \varphi(x)] | U) \xrightarrow{x \rightarrow \beta^-} 0$. Z $\neg(3)$ ale platí
 $\neg(\lim_{x \rightarrow \beta^-} \rho([x, \varphi(x)] | \partial\Gamma) = 0) \Rightarrow U \not\subset \partial\Gamma \Rightarrow$
 $(\exists y_0 \in [P, Q])([\beta, y_0] \notin \partial\Gamma) \Rightarrow [\beta, y_0] \in \Gamma$

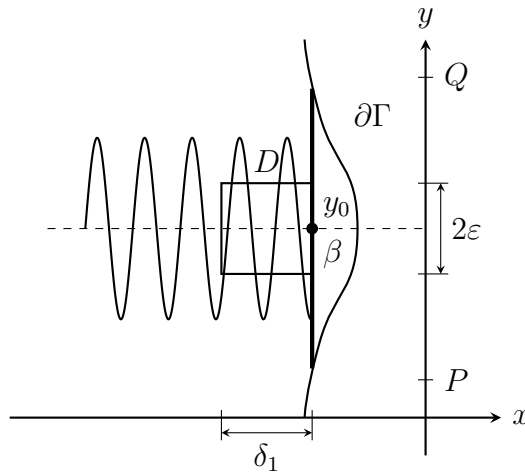


4) Konstrukce $D \subset \Gamma$ a spor

Dle (3): $(\exists y_0 \in [P, Q])(\exists \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(D \equiv [\beta - \delta_1, \beta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset \Gamma)$.
 $f \in C(\Gamma)$, D komp. $\Rightarrow (\exists M > 0)(\forall [x, y] \in D)(|f(x, y)| \leq M)$. Dle (1), (2):
 $(\exists \{\bar{x}_n\}, \{\bar{\bar{x}}_n\} \in \pi)(\exists n_1)(\forall n > \max\{n_0, n_1\})(\varphi(\bar{x}_n) = y_0 - \varepsilon, \varphi(\bar{\bar{x}}_n) = y_0 + \varepsilon,$
 $\bar{x}_n, \bar{\bar{x}}_n \geq \beta - \delta_1)$. Pak když pro dané $\varepsilon > 0$ (z konstrukce D) zvolíme
 $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\}$, bude platit

$$\underbrace{|\varphi(\bar{\bar{x}}_n) - \varphi(\bar{x}_n)|}_{2\varepsilon} \stackrel{L}{=} |\varphi'(\xi_n)| |\bar{x}_n - \bar{\bar{x}}_n| = \underbrace{|f(\xi_n, \varphi(\xi_n))|}_{\leq M} \underbrace{|\bar{x}_n - \bar{\bar{x}}_n|}_{\leq \delta}, \text{ kde}$$

$\xi_n \in [\bar{x}_n, \bar{\bar{x}}_n]$ a využíváme fakt, že φ řeší $y' = f(x, y)$ tj. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$
 $y(x_0) = y_0$



EXISTENČNÍ TEORIE

tj. $2\varepsilon \leq M\delta \leq M\frac{\varepsilon}{2M} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ spor. $\rightsquigarrow \exists \lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x) = L \in \mathbb{R}$

Víme tedy za jakých okolností je řešení neprodloužitelné, zbývá se jen overřit, zda-li takové řešení existuje.

V (Existence neprodloužitelného řešení):

Nt $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ je oblast, $f \in C(\Gamma)$, $[x_0, y_0] \in \Gamma$.

Potom existuje doprava i doleva neprodloužitelné řešení úlohy (3)

Dk: proces prodloužení je dán opakovaným použitím Peanovy věty. Ozn.

$\forall n \in \mathbb{N} : E_n := \{[x, y] \in \Gamma \mid |x - x_0| < n \wedge |y - y_0| < n, \rho([x, y] \mid \partial\Gamma) > \frac{1}{n}\}$

Potom $\overline{E_n} \subset \Gamma$ je kompakt a platí $\overline{E_n} \subset E_{n+1}$. Nt dále φ řeší (3) a je prodlouž. dle Peanovy V. Víme, že $[x, \varphi(x)] \in E_n$, pokud $|x - x_0| < n \wedge |\varphi(x) - y_0| < n$, $\rho([x, \varphi(x)] \mid \partial\Gamma) > \frac{1}{n}$

Předpokládejme, že $(\exists \tilde{n} \in \mathbb{N})([x, \varphi(x)] \in E_{\tilde{n}}, \varphi(x) \text{ je neprodlouž.})$, z kritérií neprodlouž. dále platí $\neg(|x - x_0| < \hat{n}), \neg(|\varphi(x) - y_0| < \hat{n}), \neg(\rho([x, \varphi(x)] \mid \partial\Gamma) < \frac{1}{\hat{n}}) \rightsquigarrow \varphi(x)$ unikne z každé mn. E_n

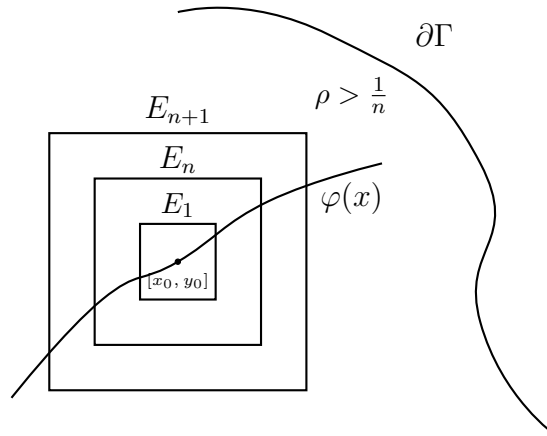
postupně:

pro $E_1 : \exists[a_0, \varphi(a_0)] \notin \overline{E_1} \wedge (\exists n_1 > 1)([a_0, \varphi(a_0)] \in E_{n_1} \subset \Gamma)$

pro $E_{n_1} : \exists[a_1, \varphi(a_1)] \notin \overline{E_{n_1}} \wedge (\exists n_2 > n_1)([a_1, \varphi(a_1)] \in E_{n_2} \subset \Gamma)$

$\vdots$

pro $E_{n_k} : \exists[a_k, \varphi(a_k)] \notin \overline{E_{n_k}} \wedge (\exists n_{k+1} > n_k)([a_k, \varphi(a_k)] \in E_{n_{k+1}} \subset \Gamma)$



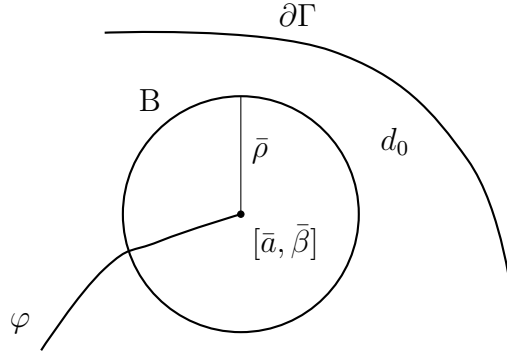
Vzniká posl. $\{a_k\}_{k=0}^\infty$, která je rost. $(a_{k+1} > a_k) \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \equiv \bar{a} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ a φ řeší (3) na $[x_0, \bar{a}]$. Sporem ukážeme, že je neprodlouž. doprava.

EXISTENČNÍ TEORIE

Nt' φ prodlouž. doprava $\Rightarrow \neg 1 \wedge \neg 2 \wedge \neg 3 \xrightarrow{(*) \text{ lemma}} \exists \lim_{x \rightarrow \bar{a}} \varphi(x) = \bar{\beta} \in \mathbb{R}$.

Dále plyne z $\neg 1 : \bar{a} < +\infty$, z $\neg 3 : (\lim_{x \rightarrow \bar{a}^-} \rho([x, \varphi(x)] | \partial\Gamma) > 0)$ a tedy

$(\exists \bar{\rho} > 0)(B \equiv \overline{B([\bar{a}, \bar{\beta}], \bar{\rho})} \subset \Gamma)$ a $(\exists d_0 > 0)(\forall [x, y] \in B)(\rho([x, y] | \partial\Gamma) \geq d_0)$



$$\left. \begin{aligned} [a_k, \varphi(a_k)] &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} [\bar{a}, \bar{\beta}] \implies (\exists k_0)(\forall k > k_0)([a_k, \varphi(a_k)] \in B) \\ \overline{E_k} \subset E_{k+1} &\implies (\exists k_1)(\forall k > k_1)(\frac{1}{n_k} < d_0, \text{ tj. } B \subset E_{n_k}) \end{aligned} \right\} \text{ozn. } k_2 = \max\{k_0, k_1\}$$

Pak $\forall k > k_2 : (d_0 > \frac{1}{n_k}) \wedge (|x_0 - \bar{a}| + \bar{\rho} + |y_0 - \bar{\beta}| < n_k)$

Nakonec:

$$\text{a) } |a_k - x_0| \stackrel{\Delta}{\leq} |a_k - \bar{a}| + |\bar{a} - x_0| \leq \bar{\rho} + |\bar{a} - x_0| \leq |x_0 - \bar{a}| + \bar{\rho} + |y_0 - \bar{\beta}| < n_k$$

$$\text{b) } |\varphi(a_k) - y_0| \stackrel{\Delta}{\leq} |\varphi(a_k) - \bar{\beta}| + |\bar{\beta} - y_0| \leq \bar{\rho} + |\bar{\beta} - y_0| \leq |x_0 - \bar{a}| + \bar{\rho} + |y_0 - \bar{\beta}| < n_k$$

$$\text{c) } \rho([a_k, \varphi(a_k)] | \partial\Gamma) \geq d_0 > \frac{1}{n_k}$$

$$\iff (\forall k > k_2)([a_k, \varphi(a_k)] \in E_{n_k}) \text{ spor.}$$

pozn. : Nt' φ na (α, β) řeší $y' = f(x, y) \Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), x \in (\alpha, \beta)$
 $y(x_0) = y_0$

$$f \in C(\Gamma) \Rightarrow \varphi'(x) \exists \Rightarrow \varphi \in C((\alpha, \beta)) \Rightarrow f(x, \varphi(x)) \in C((\alpha, \beta))$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \in C(\alpha, \beta) \Rightarrow \varphi \in C^1((\alpha, \beta))$$

V (Vyšší regularita řešení)

Nt' platí předpoklady Peanovy věty a nt' $f \in C^{(p)}(\Gamma)$ pro $p \in \mathbb{N}_0$

Potom řešení φ na (α, β) má vyšší regularitu tj. $\varphi \in C^{(p+1)}((\alpha, \beta))$

Dk: pomocí neúplné indukce: $f \in C^0(\Gamma) \xrightarrow{\text{pozn.}} \varphi \in C^1((\alpha, \beta))$

Nt' platí IP $f \in C^k(\Gamma) \Rightarrow \varphi \in C^{k+1}((\alpha, \beta)), \forall k < p$. Pak $f \in C^{k+1}(\Gamma)$

$$\Rightarrow f(x, \varphi(x)) \in C^{k+1}((\alpha, \beta)) \Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \in C^{k+1}((\alpha, \beta))$$

$$\Rightarrow \varphi \in C^{k+2}((\alpha, \beta)). \text{ Pro } k \leq p \text{ už nelze provést.}$$

EXISTENČNÍ TEORIE

V (O spojitě závislosti na datech):

Nt $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $[x_0, y_0] \in \Gamma$, $M, L > 0$ pevné,
 $\mathcal{F} = \{f \in C(\Gamma) \mid \forall [x, y], [x, \tilde{y}] \in \Gamma, |f(x, y)| \leq M, |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|\}$
 Nt $y' = f(x, y)$ řeší $\varphi = \varphi(x)$ na $[\bar{a}, \bar{b}]$ a $\bar{y}' = \bar{f}(x, y)$ řeší $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x)$ na $[\bar{a}, \bar{b}]$
 $y(x_0) = y_0$ $\bar{y}(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$

pro $f, \bar{f} \in \mathcal{F}$.

Potom platí: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall [\bar{x}_0, \bar{y}_0] \in \Gamma, |\bar{x}_0 - x_0| < \delta, |\bar{y}_0 - y_0| < \delta)$
 $(\forall \bar{f} \in \mathcal{F}, \forall [x, y] \in \Gamma)(|f(x, y) - \bar{f}(x, y)| < \delta)(\forall x \in [\bar{a}, \bar{b}])(|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| < \varepsilon)$

pozn. : Spoj. závislost na datech pro (3): $y' = f(x, y)$
 $y(x_0) = y_0$

Předp. : $[x_0, y_0] \in \Gamma$, f jsou data, kolem nichž spojitost zkoumáme.

Nt (α_0, β_0) je def. obor neprodlouž. řešení $\varphi = \varphi(x)$ pro úlohu (3) s daty $[x_0, y_0]$ a $f \in \mathcal{F}$. Pro změněná data $[\bar{x}_0, \bar{y}_0]$, $\bar{f} \in \mathcal{F}$ uvažujeme interval $[\bar{a}, \bar{b}]$
 $\subset [\alpha_0, \beta_0]$ pro řešení $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x)$ úlohy ($\bar{3}$): $\bar{y}' = \bar{f}(x, y)$
 $\bar{y}(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$

Dk:

Krok 1: **lemma:** $\varphi = \varphi(x) \iff \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) d\hat{x}$ (anal. pro ($\bar{3}$))

dk: ($\Rightarrow$) : dosadíme do (3):

$$\left. \begin{array}{l} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{array} \right| \int_{x_0}^x dx \Rightarrow \varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{=y_0} = \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) d\hat{x}$$

$$(\Leftarrow) : \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) d\hat{x} \Rightarrow \varphi(x_0) = y_0,$$

derivováním: $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Krok 2: odhad rozdílu $\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) d\hat{x}$$

$$\bar{\varphi}(x) = y_0 + \int_{\bar{x}_0}^x \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x})) d\hat{x}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) - \bar{\varphi}(x) = y_0 - \bar{y}_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) d\hat{x} - \int_{\bar{x}_0}^x \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x})) d\hat{x} = y_0 - \bar{y}_0 + \underbrace{\int_{x_0}^x (f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))) d\hat{x}}_{\mp f(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))}$$

$$\int_{x_0}^x (f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))) d\hat{x} + \int_{x_0}^{\bar{x}_0} \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x})) d\hat{x} = y_0 - \bar{y}_0 + \int_{x_0}^x (f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))) d\hat{x} + \int_{x_0}^{\bar{x}_0} \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x})) d\hat{x}$$

EXISTENČNÍ TEORIE

S požadavky: $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta, |x_t 0 - x| < \delta, f \in \mathcal{F} :$

$$|f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - f(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))| \leq L|\varphi(\hat{x}) - \bar{\varphi}(\hat{x})| \wedge (\forall [x, y] \in \Gamma)(|f(x, y) - \bar{f}(x, y)| < \delta).$$

$$\text{Tedy } |\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| \leq \delta + \left| \int_{x_0}^x L|\varphi(\hat{x}) - \bar{\varphi}(\hat{x})| d\hat{x} \right| + \left| \int_{x_0}^x \delta d\hat{x} \right| + \left| \int_{x_0}^{\bar{x}_0} M d\hat{x} \right| =$$

$$\delta + \left| \int_{x_0}^x L|\varphi(\hat{x}) - \bar{\varphi}(\hat{x})| d\hat{x} \right| + \underbrace{|x - x_0|}_{\leq \bar{b} - \bar{a}} \delta + |\bar{x}_0 - x_0| M \leq \delta(1 + \bar{b} - \bar{a} + M) +$$

$$\left| \int_{x_0}^x L|\varphi(\hat{x}) - \bar{\varphi}(\hat{x})| d\hat{x} \right|, \text{ kde necháváme abs. hodnoty vně int., protože z Peana}$$

může být $x \geq x_0$ nebo $x < x_0$. Na zbytek důkazu využijeme obecné lemma.

Lemma (Grönwell):

Nt $u : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je spoj., $\alpha, \gamma \geq 0, \beta > 0$ a $u(x) \leq \alpha + \int_{x_0}^x (\beta u(s) + \gamma) ds$,
 $x \in [x_0, x_1]$. Pak platí $\forall x \in [x_0, x_1] : u(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)} + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta(x-x_0)} - 1)$

Dk: ozn. $v(x) \equiv \alpha + \int_{x_0}^x (\beta u(s) + \gamma) ds$, kde $u(x) \leq v(x), v'(x) = \beta u(x) + \gamma \leq$
 $\beta v(x) + \gamma \Rightarrow v'(x) - \beta v(x) \leq \gamma / \cdot e^{-\beta(x-x_0)}$

$$\underbrace{v'(x)e^{-\beta(x-x_0)} - \beta v(x)e^{-\beta(x-x_0)}}_{\stackrel{d}{=} \frac{d}{dx}(v(x))e^{-\beta(x-x_0)}} \leq \gamma e^{-\beta(x-x_0)} \Rightarrow \frac{d}{dx}(v(x)e^{-\beta(x-x_0)}) \leq \gamma e^{-\beta(x-x_0)} / \int_{x_0}^x d\hat{x}$$

$$v(x)e^{-\beta(x-x_0)} - v(x_0) \leq \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta(x-x_0)}) / \cdot e^{\beta(x-x_0)}$$

$$\Rightarrow u(x) \leq v(x) \leq v(x_0)e^{\beta(x-x_0)} + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta(x-x_0)} - 1), v(x_0) \equiv \alpha$$

V našem případě je $u(x) = |\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)|$, $\alpha = \delta(1 + \bar{b} - \bar{a} + M)$, $\beta = L$, $\gamma = 0$,
 pak (zvlášť pro $x \geq x_0$ a $x < x_0$)

$$\Rightarrow |\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| \leq \delta(1 + \bar{b} - \bar{a} + M)e^{\beta|x-x_0|} \stackrel{|x-x_0| \leq \bar{b}-\bar{a}}{\leq} \delta(1 + \bar{b} - \bar{a} + M)e^{\beta(\bar{b}-\bar{a})}$$

Pak pro zadané $\varepsilon > 0$, určíme $\delta := (1 + \bar{b} - \bar{a} + M)^{-1} e^{-\beta(\bar{b}-\bar{a})} \varepsilon$, a pro

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta, |y_0 - \bar{y}_0| < \delta, |f(x, y)/\bar{f}(x, y)| < \delta, [x, y] \in \Gamma \Rightarrow |\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| < \varepsilon, \\ x \in [\bar{a}, \bar{b}]$$

EXISTENČNÍ TEORIE

DEF (Soustava ODR 1. řádu)

Nt $F^k : \mathbb{R}^{1+n+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ je obyč. dif. výraz

$$\text{Pak } F^1(x, y^1, \dots, y^n, \frac{dy^1}{dx}, \dots, \frac{dy^n}{dx}) = 0$$

$$\vdots \quad (4)$$

$$F^n(x, y^1, \dots, y^n, \frac{dy^1}{dx}, \dots, \frac{dy^n}{dx}) = 0$$

se nazývá obyč. dif. rovnice 1. řádu pro neznámou vekt fci $y = [y^1, \dots, y^n]$

$$\text{Soust. } \frac{dy^1}{dx} = f^1(x, y^1, \dots, y^n)$$

$\vdots$

$$\frac{dy^n}{dx} = f^n(x, y^1, \dots, y^n)$$

se nazývá ODR 1. řádu v normálním tvaru, s vekt. zápisem $y' = f(x, y)$

kde složky vektorů mají horní indexy

pozn. : Lipschitzkovskost pro $f : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}$ vůči vektoru y : pro $\Gamma \subset \mathbb{R}^{1+n}$ oblast a $[x_0, y_0] \in \Gamma$, $(\exists H_{[x_0, y_0]} \subset \Gamma \text{ okolí})(\exists L > 0)(|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|)$,

$$\text{kde } |f(x, y) - f(x, \bar{y})| = \left(\sum_{i=1}^n |f^i(x, y^1, \dots, y^n) - f^i(x, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|y - \bar{y}| = \left(\sum_{i=1}^n |y^i - \bar{y}^i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

tvrzení: Pokud $\Gamma \subset \mathbb{R}^{1+n}$ je oblast, $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{n})(\frac{\partial f^i}{\partial y^j} \in C(\Gamma))$,

pak $(\forall [x_0, y_0] \in \Gamma)(\exists \rho_0 > 0)(f \text{ je lipschitzkovské vůči } y \text{ na } \overline{B([x_0, y_0], \rho_0)})$

dk: pro $i \in \hat{n}$: ozn. $g^i(t) = f^i(x, y + t(\bar{y} - y))$, $t \in [0, 1] \Rightarrow$

$$|g^i(1) - g^i(0)| = |f^i(x, \bar{y}) - f^i(x, y)| = \{g^i \in C^1([0, 1])\} = (g^i)'(\xi^i)(1 - 0)$$

$$= \underbrace{\left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial y^j}(x, y + \xi^i(\bar{y} - y)) \cdot (\bar{y}^j - y^j) \right|}_{\leq L^i} \leq L^i \sum_{j=1}^n |\bar{y}^j - y^j| \leq nL^i \left(\sum_{k=1}^n |\bar{y}^k - y^k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= nL^i |\bar{y} - y|. \text{ Pak } |f(x, y) - f(x, \bar{y})| = \left(\sum_{i=1}^n |f^i(x, y) - f^i(x, \bar{y})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n|y - \bar{y}|$$

$$\left(\sum_{i=1}^n (L^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{Li \leq \tilde{L}}{\leq} n^{\frac{3}{2}} \tilde{L} |y - \bar{y}|$$

EXISTENČNÍ TEORIE

V (Picardova):

Nt $\Gamma \subset \mathbb{R}^{1+n}$ oblast, $n \in \mathbb{N}$ $f \in C(\Gamma)$, $\frac{\partial f^i}{\partial y^j} \in C(\Gamma)$, $i, j = 1, \dots, n$, $[x_0, y_0] \in \Gamma$
 Pak řeš. úlohy (5) $y' = f(x, y)$ ozn. $\varphi = \varphi(x)$ jednozn. $\exists$ na int. $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$
 $y(x_0) = y_0$

Dk: Už víme: $\varphi = \varphi(x)$ řeší (5) $\iff \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) d\hat{x} \quad (*)$

(*) motivuje návrh *Picardovy iterační posl.*:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0(x) = y_0 \text{ na } (x_0 - a_0, x_0 + a_0) \\ \varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi_0(\hat{x})) dx \\ \vdots \\ \varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi_k(\hat{x})) dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Tím vzniká fčn. posl.} \\ \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \text{ na } (x_0 - a_0, x_0 + a_0), \\ \text{kde } \varphi_k = C^{(1)}((x_0 - a_0, x_0 + a_0)) \end{array}$$

lemma: Posl. $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ na $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$ konverguje stejnoměrně

dk: chceme BC, tzn.

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall k \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in (x_0 - a_0, x_0 + a_0))(|\varphi_{k+p}(x) - \varphi_k(x)| < \varepsilon)$

$$|\varphi_{k+p}(x) - \varphi_k(x)| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{l=0}^{p-1} |\varphi_{k+l+1}(x) - \varphi_{k+l}(x)|$$

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = |y_0 + \int_{x_0}^x \underbrace{f(\hat{x}, \varphi_0(\hat{x}))}_{=y_0} dx - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(\hat{x}, y_0) d\hat{x} \right| =$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \int_{x_0}^x f^i(\hat{x}, y_0) d\hat{x} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \left| \int_{x_0}^x f^i(\hat{x}, y_0) d\hat{x} \right|^2 \leq \left| \int_{x_0}^x |f^i(\hat{x}, y_0)| d\hat{x} \right|^2 \leq \left| \int_{x_0}^x |f(\hat{x}, y_0)| d\hat{x} \right|^2 \right\}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n \left| \int_{x_0}^x |f(\hat{x}, y_0)| d\hat{x} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \left| \int_{x_0}^x |f(\hat{x}, y_0)| d\hat{x} \right| \quad \text{ozn. } (*)$$

$[x_0, y_0] \in \Gamma$ ot. $\Rightarrow (\exists \rho_0 > 0)(B = \overline{B([x_0, y_0], \rho_0)} \subset \Gamma)$, B omez. a uz.

$\stackrel{\text{H-B}}{\Rightarrow} B$ komp. $\stackrel{\text{B-W}}{\Rightarrow} (\exists M > 0)(\forall [x, y] \in B)(|f(x, y)| \leq M)$, pak $(*) =$

$$\sqrt{n} \left| \int_{x_0}^x \underbrace{|f(\hat{x}, y_0)|}_{\substack{\leq M \\ \text{pro } [\hat{x}, y_0] \in B}} d\hat{x} \right| \leq \sqrt{n} M \left| \int_{x_0}^x d\hat{x} \right| = \sqrt{n} M |x - x_0| \quad (\bigcirc)$$

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi_1(\hat{x})) d\hat{x} - \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi_0(\hat{x})) d\hat{x} \right) \right| =$$

EXISTENČNÍ TEORIE

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi_1(\hat{x})) - f(\hat{x}, \varphi_0(\hat{x})) \, d\hat{x} \right| &= \left(\sum_{i=1}^n \left| \int_{x_0}^x f^i(\hat{x}, \varphi_1(\hat{x})) - f^i(\hat{x}, \varphi_0(\hat{x})) \, d\hat{x} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\{f^i(\hat{x}, \varphi_1(\hat{x})) - f^i(\hat{x}, \varphi_0(\hat{x}))\}| \leq |f(\hat{x}, \varphi_1(\hat{x})) - f(\hat{x}, \varphi_0(\hat{x}))| \\ &\leq \sqrt{n} \left| \int_{x_0}^x |f(\hat{x}, \varphi_1(\hat{x})) - f(\hat{x}, \varphi_0(\hat{x}))| \, d\hat{x} \right| \leq \sqrt{n}L \left| \int_{x_0}^x |\varphi_1(\hat{x}) - \varphi_0(\hat{x})| \, d\hat{x} \right| \quad (\circ\circ), \end{aligned}$$

kde jsme využili lok. lipschitzkovskosti f .

$$\text{Dle } (\circ) \text{ je } (\circ\circ) \leq \sqrt{n}L \left| \int_{x_0}^x \sqrt{n}M |\hat{x} - x_0| \, d\hat{x} \right| = \sqrt{n}L \sqrt{n}M \frac{|x - x_0|^2}{2} \quad (\circ\circ\circ)$$

hypotéza: $|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq \sqrt{n}M(\sqrt{n}L)^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$

dk: $k = 0 \checkmark$

$k = 1 \checkmark$

zbytek indukci: Nt H. platí pro $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+2}(x) - \varphi_{k+1}(x)| &\leq \sqrt{n}L \left| \int_{x_0}^x |\varphi_{k+1}(\hat{x}) - \varphi_k(\hat{x})| \, d\hat{x} \right| \stackrel{\text{IP}}{\leq} \\ &\sqrt{n}L \left| \int_{x_0}^x \sqrt{n}M(\sqrt{n}L)^k \frac{|\hat{x} - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \, d\hat{x} \right| = \sqrt{n}M(\sqrt{n}L)^k (\sqrt{n}L) \frac{|x - x_0|^{k+2}}{(k+2)!} \end{aligned}$$

A pak tedy platí:

$$|\varphi_{k+p}(x) - \varphi_k(x)| \leq \sum_{l=0}^{p-1} |\varphi_{k+l+1}(x) - \varphi_{k+l}(x)| \leq \sum_{l=0}^{p-1} \sqrt{n}M(\sqrt{n}L)^{k+l} \frac{|x - x_0|^{k+l+1}}{(k+l+1)!}$$

všimněme si, že na PS získáváme jakýsi součet AK mocninné řady $\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{n}M(\sqrt{n}L)^j \frac{|x - x_0|^{j+1}}{(j+1)!}$ s pol. konv $+\infty$. Nevzniká tedy další omez. pro x ,

kromě $[\hat{x}, y_0] \in B$, určíme tedy např. $a_0 = \frac{1}{2}\rho_0$, pak $\varphi_k \xrightarrow{(x_0 - a_0, x_0 + a_0)} \varphi$

lemma: φ řeší poč. úlohu (5)

dk: Picardova iterace: $\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi_k(\hat{x})) \, d\hat{x}$, dále z BC:

$$|f(x, \varphi_{k+p}(x)) - f(x, \varphi_k(x))| \leq L |\varphi_{k+p}(x) - \varphi_k(x)| \Rightarrow f(x, \varphi_{k+p}(x)) \Rightarrow f(x, \varphi_k(x))$$

tj. $\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi_k(\hat{x})) \, d\hat{x} \longrightarrow \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) \, d\hat{x}$, kde φ_{k+1}

konv. bodově

lemma: Řešení φ je jediné

dk: Nt ψ také řeší (5) na (α, β) , $x_0 \in (\alpha, \beta)$, pak

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) \, d\hat{x} \text{ na } (x_0 - a_0, x_0 + a_0),$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \psi(\hat{x})) \, d\hat{x} \text{ na } (\alpha, \beta),$$

EXISTENČNÍ TEORIE

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - f(\hat{x}, \psi(\hat{x})) \, d\hat{x} \right| \stackrel{(\circ\circ)}{\leq} \sqrt{n}L \left| \int_{x_0}^x |\varphi(\hat{x} - \psi(\hat{x}))| \, d\hat{x} \right|$$

$$\text{Grönwall: } u(x) \leq \alpha + \int_{x_0}^x (\beta u(s) + \gamma) \, ds \Rightarrow u(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)} + \frac{\gamma}{\beta} (e^{\beta(x-x_0)} - 1)$$

$$u(x) = |\varphi(x) - \psi(x)|, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{n}L, \quad \gamma = 0 \Rightarrow u(x) = |\varphi(x) - \psi(x)| \leq 0 \\ \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x), x \in (x_0 - a_0, x_0 + a_0) \cap (\alpha, \beta)$$



Lee Madgwick's "The Veil"

Analytická řešení LDR

DEF (Soustava LDR 1. řádu):

Nt $I \subset \mathbb{R}$ je int. $(\forall i, j \in \hat{n})(a_{ij} \in C(I), b_j \in C(I))$,

$$\begin{aligned} \text{Pak} \quad \frac{dy^1}{dx} &= \sum_{j=1}^n a_{1j}(x)y^j + b_1(x) \\ &\vdots \\ \frac{dy^n}{dx} &= \sum_{j=1}^n a_{nj}(x)y^j + b_n(x) \end{aligned} \quad (6)$$

vekt. zápisem $y' = \mathbb{A}(x)y + b(x)$, kde $\mathbb{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, $b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$

se nazývá soustava lineárních dif. rnic 1. řádu s pravou stranou $b(x)$. Dále $y' = \mathbb{A}(x)y$ ozn. (7) se nazve soustava lineárních dif. rnic 1. řádu bez pravé strany.

pozn. : poč. úloha $y' = \mathbb{A}(x)y + b(x)$ ozn. (8) je jednoznačně řeš. na I dle $y(x_0) = y_0$

Picardovy věty a existenci neprodlouž. řešení, neboť $f(x, y) = \mathbb{A}(x)y + b(x)$
 $\Rightarrow \Gamma = I \times \mathbb{R}^n$, pro I ot. je oblast $\Rightarrow f \in C(\Gamma)$ a $\frac{\partial f^i}{\partial y_j}(x, y) = a_{ij}(x) \in C(\Gamma)$

DEF (LDR n-tého řádu):

Nt $I \subset \mathbb{R}$ je int., $(\forall j \in \hat{n})(p_j \in C(I))(q \in C(I))$,

Pak $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = q(x)$ na I ozn. (9)

se nazve lineární dif. rce n-tého řádu s pravou stranou $q(x)$.

Dále $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0$ na I ozn. (10)

se nazve lineární dif. rce n-tého řádu bez pravé strany.

pozn. : vztah mezi (6) a (9):

Pokud ozn. $z^1(x) = y(x)$, $z^2(x) = y'(x)$, $\dots$, $z^n(x) = y^{(n-1)}(x)$, pak vekt. fce

$$z(x) = \begin{pmatrix} z^1(x) \\ \vdots \\ z^n(x) \end{pmatrix} \text{ splň. soustavu:}$$

$$(z^1)'(x) = z^2(x)$$

$$(z^2)'(x) = z^3(x)$$

$$\vdots$$

$$(z^{n-1})'(x) = z^n(x)$$

$$(z^n)'(x) = z^{n+1}(x) = y^{(n)}(x) = -p_1(x)z^n(x) - \dots - p_n z^1(x) + q(x)$$

$$\text{kde } \mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & \dots & & -p_1 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{pmatrix}$$

pozn. : počáteční úloha pro (9) na I :

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = q(x)$$

$$y(x_0) = y_0^1, \quad y'(x_0) = y_0^2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^n \quad \text{ozn. (9')}$$

je řešitelná jednoznačně dle Picardovy věty.

pozn. : Nt' $y_1, \dots, y_n$ na I řeší (10), pak každá lin. kombinace řeší (10):

$$\text{ozn. } Ly = y^{(n)} + \sum_{j=1}^n p_j(x)y^{(n-j)}, \text{ kde pro } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \sum_{l=1}^k \alpha_l y_l(x),$$

$$\text{pak } Ly(x) = \left(\sum_{l=1}^k \alpha_l y_l(x) \right)^{(n)} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^k \alpha_l y_l(x) \right)^{(n-j)} = \sum_{l=1}^k \alpha_l \underbrace{(Ly_l(x))}_{=0} = 0$$

Dále nt' y řeší (9) a z řeší (10) na I , pak $y + z$ řeší (9):

$$Ly = q, \quad Lz = 0 \implies L(y + z) = Ly + Lz = q$$

ANALYTICKÁ ŘEŠENÍ LDR

DEF (Lineárně závislé fce na int I):

Nt na $I \subset \mathbb{R}$ je int. $f_1, \dots, f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou na I LZ, pokud:

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \sum_j |\alpha_j| \neq 0)(\forall x \in I) \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) = 0 \right).$$

V opačném případě řekn., že jsou LN.

př. : fce $1, x, \dots, x^{k-1}$ na $(-1, 1) \equiv I$. Přestože $x|_{x=0} = 0, \dots, x^{k-1}|_{x=0} = 0$, fce jsou na I LN.

DEF (Wronskián):

Nt $I \subset \mathbb{R}$ je int. , $f_1, \dots, f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferenc. do řádu k-1. Pak fce:

$$W_{f_1, \dots, f_k}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_k'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & \dots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}_{k \times k} \quad \text{se nazve Wronského determinant.}$$

(Wronskián)

V (Wronskián LZ funkcí):

Nt $I \subset \mathbb{R}$ je int. $f_1, \dots, f_k$ na I dif. do řádu k-1 a LZ na I ,

Pak $(\forall x \in I)(W_{f_1, \dots, f_k}(x) = 0)$

Dk: víme, že $(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \sum_j |\alpha_j| \neq 0) \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) = 0 \right)$

$$\implies (\forall l \in \widehat{k-1})(\forall x \in I) \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j^{(l)}(x) = 0 \right) \implies \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(k-1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} f_k \\ f_k' \\ \vdots \\ f_k^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

$$\text{LZ } \forall x \in I \implies (\forall x \in I)(W_{f_1, \dots, f_k}(x) = 0)$$

př. : $f_1(x) = x^3, f_2(x) = |x|^3$

$$W_{f_1, f_2}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$$

a) $I = [0, 1), f_1(x) = f_2(x)$ LZ na I a $W_{f_1, f_2}(x) = 0$

b) $I = (-1, 0), f_1(x) = x^3, f_2(x) = -x^3$ LZ na I a $W_{f_1, f_2}(x) = 0$

c) $I = (-1, 1), f_1, f_2$ LN na I ale $W_{f_1, f_2}(x) = 0, \forall x \in I$

ANALYTICKÁ ŘEŠENÍ LDR

pozn. : nt' y řeší (10) tj. $y^{(n)} + \sum_{j=1}^n p_j(x)y^{(n-j)} = Ly = 0$ na I

1) $y \equiv 0$ na I řeší (10)

2) Poč. úloha $Ly = 0$ na I , $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = 0$ má jediné řešení $y \equiv 0$ dle (1) a Picarda

3) Nt' $y_1, \dots, y_n$ řeší (10) na I , $Ly = 0$ a $(\exists x_0 \in I)(W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) = 0)$ na I .

Pak $y_1, \dots, y_n$ jsou na I LZ a $W_{y_1, \dots, y_n}(x) = 0$ na I

dk: $W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$, tj sloupce jsou LZ $\Leftrightarrow$

$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \neq 0) (\sum_{j=1}^n \underbrace{\alpha_j y_j^{(l)}(x_0)}_{Y_j^{(l)}} = 0, l = 0, \dots, n-1),$

ozn. $Y(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j(x)$ a $Y(x_0) = y_1, Y'(x_0) = y_2, \dots, Y^{(n-1)}(x_0) = y_n$,

z def LZ $y_1 = \dots = y_n = 0$, pak dle (2) $Y(x) = 0$ na $I \Rightarrow (\forall x \in I)$

$(\forall l \in \widehat{n-1})(Y^{(l)}(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j^{(l)}(x) = 0)$ a tedy sloupce ve Wronskiánu jsou

$\forall x \in I$ LZ se stejnými koef. $\alpha_i \Rightarrow W_{y_1, \dots, y_n}(x) = 0$ a $y_1, \dots, y_n$ jsou na I LZ.

V (*):

Nt' na I $y_1, \dots, y_n$ řeší (10), tj $Ly = 0$. Pak nastanou pouze 2 případy:

a) $(\forall x \in I)(W_{y_1, \dots, y_n}(x) = 0)$ a $y_1, \dots, y_n$ jsou LZ na I

b) $(\forall x \in I)(W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0)$ a $y_1, \dots, y_n$ jsou LN na I

ANALYTICKÁ ŘEŠENÍ LDR

DEF (Fundamentální systém):

Nt $y_1, \dots, y_n$ na I řeší $Ly = 0$ a jsou na I LN

Pak soubor $(y_1, \dots, y_n)$ nazvu fundamentální systém (FS)

V (Řešení jako LK FS):

Nt $(y_1, \dots, y_n)$ na I je FS. Pak každé řešení (10) na I lze nakombinovat z FS

Dk: Nt $Y = Y(x)$ řeší na I (10). Zvolme $x_0 \in I$ a ozn. $\gamma_1 = Y(x_0)$, $\gamma_2 = Y'(x_0)$, $\dots \gamma_n = Y^{(n-1)}(x_0)$. Soubor $(y_1, \dots, y_n)$ FS $\Rightarrow W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) \neq 0$ tj.

$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$ LN a tvoří bázi $\mathbb{R}^n$ a $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ nakombinu-

jeme pomocí $\alpha_1, \dots, \alpha_n : \gamma_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j^{(i-1)}(x_0)$

ozn. $z(x) = Y(x) - \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j(x) \Rightarrow z(x_0) = Y(x_0) - \gamma_1 = 0, z'(x_0) = 0,$

$\dots z^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $Lz = 0$, pak podle 2. bodu pozn. $z \equiv 0$ na I ,

tj. $Y(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j(x)$

V (Liouvilleova-Abelova věta):

Nt na $I = \mathbb{R}$, fce $y_1, \dots, y_n$ řeší (10): $Ly = 0$, nt $x_0 \in I$.

Pak $W_{y_1, \dots, y_n}(x) = W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x p_1(\hat{x}) d\hat{x}\right)$

Dk: Def si obecně $\mathbb{B}(x) = (b_{ij}(x))$, a ukažme, jak vypadá derivace $\det \mathbb{B}$

$$\frac{d}{dx} \det \mathbb{B}(x) = \frac{d}{dx} \left[\sum_{\pi} (-1)^{\text{sgn } \pi} b_{1\pi(1)}(x) \dots b_{n\pi(n)}(x) \right] = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} b_{11}(x) & \dots & b_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ (b_{i1})'(x) & \dots & (b_{in})'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(x) & \dots & b_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

kde jsme v posledním kroku použili pravidla pro derivaci součinu.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} W_{y_1, \dots, y_n}(x) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ (y_1^{(i-1)})' & \dots & (y_n^{(i-1)})' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(i-1)} & \dots & y_n^{(i-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{y_j^{(n)}(x) = -\sum_{l=1}^n p_l(x)y_j^{(n-l)}(x)\} = -\sum_{l=1}^n p_l(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(i-1)} & \dots & y_n^{(i-1)} \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-l)} & \dots & y_n^{(n-l)} \end{vmatrix} \\
 &= -p_1(x)W_{y_1, \dots, y_n}(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{d}{dx}W_{y_1, \dots, y_n}(x)}{W_{y_1, \dots, y_n}(x)} &= -p_1(x) / \int_{x_0}^x d\hat{x} \Rightarrow \ln \left(\frac{W_{y_1, \dots, y_n}(x)}{W_{y_1, \dots, y_n}(x_0)} \right) = - \int_{x_0}^x p_1(x) d\hat{x} \\
 W_{y_1, \dots, y_n}(x) &= W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) \cdot \exp \left(- \int_{x_0}^x p_1(\hat{x}) d\hat{x} \right)
 \end{aligned}$$

pozn. : Pro $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = q(x)$ (*) máme

$$W_{y_1, \dots, y_n} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \text{ jako test LN na } I.$$

$(y_1, \dots, y_n)$ je FS pro (*), pokud je LN soubor řešení pro $q \equiv 0$

$$W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) \cdot \exp \left(- \int_{x_0}^x p_1(\hat{x}) d\hat{x} \right) \text{ platí pro lib. soubor řešení (*)}$$

V (O existenci a jednoznačnosti LDR zadané FS):

Nt $y_1, \dots, y_n$ na I mají spoj. derivace všech řádů n a $W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0$ na I , pak $\exists!$ rce $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$ (○), pro níž je $(y_1, \dots, y_n)$ FS na I .

Dk: a) konstrukce: pro lib $y = y(x)$ se spoj. der. do řádu n ,

$$\begin{aligned}
 W_{y, y_1, \dots, y_n}(x) &= \begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)}(x) & y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = \{\text{rozvoj dle 1. sloupce}\} = \\
 &(-1)^{n+2}y^{(n)}(x)W_{y_1, \dots, y_n}(x) + (-1)^{n+1}y^{(n-1)}(x)D_1(x) + \dots + (-1)^2y(x)D_n(x) \\
 \text{pak def. : } p_1(x) &:= (-1)^{n+1-n-2} \frac{D_1(x)}{W_{y_1, \dots, y_n}(x)}, \dots, p_n(x) = (-1)^{2-n-2} \frac{D_n(x)}{W_{y_1, \dots, y_n}(x)}
 \end{aligned}$$

$$(-1)^{n-2} \frac{W_{y, y_1, \dots, y_n}(x)}{W_{y_1, \dots, y_n}(x)} = y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

všimněme si že pro $y(x) = y_1(x), \dots, y_n(x)$ je $W_{y, y_1, \dots, y_n}(x) = 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n$ řeší (○) s uvedenými $p_1, \dots, p_n$

ANALYTICKÁ ŘEŠENÍ LDR

b) jednoznačnost: nt $y^{(n)} + r_1(x)y^{(n-1)} + \dots + r_n(x)y = 0$ řeší také $y_1, \dots, y_n$ dosaz. do obou rnic a odečt. získáme podm. pro $\forall l \in \hat{n}$ $(p_1(x) - r_1(x))y_l^{(n-1)} + (p_2(x) - r_2(x))y_l^{(n-2)}(x) + \dots + (p_n(x) + r_n(x))y_l(x) = 0$

Předp., že rce nejsou stejné, pak $(\exists k_0 \in \hat{n}$ nejmenší) $(p_{k_0}(x) - r_{k_0}(x) \stackrel{I}{\neq} 0)$ a získáme celkem n řešení pro rci $n - k_0$ -tého řádu, spor.

pozn. : $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = q(x)$ řešíme metodou variací konst.

Mejmě řešení bez PS $y(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x)y_k(x)$, kde $y_1, \dots, y_n$ FS

$$y'(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^n c'_k(x)y_k(x)}_{=0} + \sum_{k=1}^n c_k(x)y'_k(x) \quad (1)$$

$$y''(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^n c'_k(x)y'_k(x)}_{=0} + \sum_{k=1}^n c_k(x)y''_k(x) \quad (2)$$

$$y^{(n-1)}(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^n c'_k(x)y_k^{(n-2)}(x)}_{=0} + \sum_{k=1}^n c_k(x)y_k^{(n-1)}(x) \quad (n-1)$$

$$\sum_{k=1}^n c'_k y_k^{(n-1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^n c_k(x)y_k^{(n)} + p_1(x) \sum_{k=1}^n c_k(x)y_k^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \sum_{k=1}^n c_k y_k}_{=0} = q(x)$$

Získávám pak lin. soust. pro $(C'_1(x), \dots, C'_n(x))$ s reg. maticí $(W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0)$

V (O existenci FS):

FS existuje.

Dk: Mějme $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$, ukažme, že pro tuto rnici existuje FS, tj n LN řešení $y_1, \dots, y_n$. Vezm. bázi $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ a nastavme n poč. podm.

$$\begin{array}{lll} y(x_0) = v_1^1 & \dots & y(x_0) = v_n^1 \\ y'(x_0) = v_1^2 & & y'(x_0) = v_1^2 \\ \vdots & & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = v_1^n & & y^{(n-1)}(x_0) = v_n^n \end{array}$$

Picardova V. pak zajistí ex. n rnic ozn. $(y_1, \dots, y_n)$, které řeší soustavu na-
hoře, které jsou navíc LN $\Rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ FS

LDR n-tého řádu s konst. koeficienty

LDR n-tého řádu s konst. koeficienty

DR tvaru $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = q(x)$ s pravou stranou (11)

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ bez pravé strany (12)

$a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \hat{n}$, $a_0 \neq 0$

pozn. : Charakteristický polynom: $p(\lambda) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^{n-j}$

V(O charakteristické rovnici):

Fce tvaru $e^{\lambda x}$ řeší (12) $\iff p(\lambda) = 0$

Dk: $e^{\lambda x}$ dosad. do (12): $\sum_{j=0}^n a_j \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} (e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^{n-j} e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0 \iff p(\lambda) = 0$

V(O řešení pro různé kořeny):

Nt $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou různé kořeny $p(\lambda)$, pak $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_k x}$ jsou LN řešení (12)

Dk: z předchozí V víme, že $e^{\lambda_j x}$ jsou řešení, jako test LN použijme W :

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_k x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_k e^{\lambda_k x} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_k^{k-1} e^{\lambda_k x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_k x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\iff \lambda_1, \dots, \lambda_k$ různá $e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_k x}$ LN na $\mathbb{R}$

V(O řešení pro násobné kořeny):

Nt λ_0 je k-násobný kořen $p(\lambda)$, pak fce $e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$ řeší (12) a jsou LN na $\mathbb{R}$

Dk: lemma: nt λ_0 je k-násobný kořen $p(\lambda)$, pak $p(\lambda_0) = 0, p'(\lambda_0) = 0, \dots, p^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$. **dk:** char. polynom lze reprez. $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda)$, kde λ není kořen a Q je něj. polynom stupně $n - k$. Pak $p(\lambda_0) = 0, p'(\lambda_0) = k(\lambda_0 - \lambda_0)^{k-1} Q(\lambda) = 0, \dots, p^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$

Def $g(x, \lambda) = \{\text{LS (12)}\} = \sum_{j=0}^n a_j \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} (e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^{n-j} e^{\lambda x} = p(\lambda) e^{\lambda x}$

$g(x, \lambda_0) = 0, \partial_\lambda g(x, \lambda_0) = p'(\lambda_0) e^{\lambda_0 x} + p(\lambda_0) x e^{\lambda_0 x} \stackrel{!}{=} 0, \dots, \partial_\lambda^{k-1} g(x, \lambda_0) = 0$

LDR N-TÉHO ŘÁDU S KONST. KOEFICIENTY

$$\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} g(x, \lambda) = \sum_{j=0}^n a_j \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \left(\frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} (e^{\lambda x}) \right) = \sum_{j=0}^n a_j \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} \left(\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} (e^{\lambda x}) \right),$$

protože $\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} g(x, \lambda_0) \Rightarrow x^l e^{\lambda_0 x}$ řeší (12).

u LN lze vykoukat, že jediné triviální LK dá nulu, tj. $\alpha_1, \dots, \alpha_k :$

$$\sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l+1} x^l e^{\lambda_0 x} = 0 \iff \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l+1} x^l = 0, \forall x \implies \alpha_i = 0, \forall i \in \hat{k}$$

pozn. : Pro rci (12) má FS tvar:

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 x}, \quad x e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ & \vdots \\ & e^{\lambda_p x}, \quad x e^{\lambda_p x}, \quad \dots, \quad x^{k_p-1} e^{\lambda_p x} \end{aligned},$$

kde λ_j je kořen $p(\lambda)$ s násobností k_j ,

$$j \in \hat{p}, \lambda_j \neq \lambda_l, j \neq l, \sum_{j=1}^p k_j = n$$

Soustavy lineárních DR 1. řádu

DEF (Soustavy lineárních DR 1. řádu):

Soustavy lineárních DR 1. řádu:

$$y' = \mathbb{A}(x)y + b(x) \quad \text{s pravou stranou,} \quad (6)$$

$$y' = \mathbb{A}(x)y \quad \text{bez pravé strany} \quad (7)$$

$$\text{ozn. } (*) : y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = q(x)$$

pozn. : rce (6) a (*) se dají navzájem porovnat substitucí, tzn. veškeré znalosti o (*) aplik. i pro (6)

$$\text{pozn. : } y_1(x), \dots, y_n(x) \text{ řeší (7), pak ozn-li } y_k(x) = \begin{pmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ \vdots \\ y_k^n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_k \\ y'_k \\ \vdots \\ y_k^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$\text{Wronskián bude } W_{y_1, \dots, y_n}(x) = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{vmatrix}$$

a $y_1, \dots, y_n$ řešící (7) na I je LN $\Leftrightarrow W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0$ na I . Dále LN soubor $y_1, \dots, y_n$ je FS a FS vždy existuje.

V (Liouvilleova-Jacobiova věta pro soustavy):

Nt $\mathbb{A}(x)$ je spojitá na I , $y_1, \dots, y_n$ řeší (7), $x_0 \in I$.

$$\text{Pak } W_{y_1, \dots, y_n}(x) = W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) \exp \left(\int_{x_0}^x \text{tr} \mathbb{A}(\hat{x}) d\hat{x} \right)$$

Dk:

$$\frac{d}{dx} W_{y_1, \dots, y_n}(x) = \sum_{l=1}^n \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ (y_1^l(x))' & \dots & (y_n^l(x))' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n a_{lj}(x) \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^j(x) & \dots & y_n^j(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{vmatrix}$$

$$0 \stackrel{\text{pro } l \neq j}{=} \underbrace{\sum_{l=1}^n a_{ll}(x)}_{\text{tr} \mathbb{A}} W_{y_1, \dots, y_n}(x), \text{ kde jsme využili, že } (y_i^l(x))' = \sum_{j=1}^n a_{lj} y_i^j(x).$$

$$\frac{\frac{d}{dx} W_{y_1, \dots, y_n}(x)}{W_{y_1, \dots, y_n}(x)} = \text{tr} \mathbb{A} \implies W_{y_1, \dots, y_n}(x) = W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) \exp \left(\int_{x_0}^x \text{tr} \mathbb{A}(\hat{x}) d\hat{x} \right)$$

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DR 1. ŘÁDU

V (Obdoba vět dříve):

1. FS pro úlohu (7) existuje.
2. Pro $y_1, \dots, y_n$ fce na I s 1. derivacemi a $W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0$ na I ex. jediná soustava (7)

Dk:

- 1) Řešíme poč. podm. $y' = A(x)y$, kde $v_1, \dots, v_k$ báze $\mathbb{R}^n$ a obd. Pic zaj.

ex. $(y_1, \dots, y_n) \quad y(x_0) = v_k$

2) Def $0 \stackrel{!}{=} D_i(x, y(x)) = \begin{vmatrix} (y^i(x))' & (y_1^i(x))' & \dots & (y_n^i(x))' \\ y^1(x) & y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^n(x) & y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{vmatrix}$ a opět rozvoj
podle 1. sloupce

pozn. : Variace konst. pro (6):

Mějme $y' = A(x)y + b(x)$, kde řešení bez pravé strany je $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i(x)$

$$y'(x) = \sum_{l=1}^n c'_l(x)y_l(x) + \sum_{l=1}^n c_l(x)y'_l(x) \text{ dosadím do (6): } \sum_{l=1}^n c'_l(x)y_l(x) + \sum_{l=1}^n c_l(x)y'_l(x) = \left(A(x) \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i(x) \right) + b(x) \Rightarrow b(x) = \sum_{l=1}^n c'_l(x)y_l(x)$$

pozn. $y' = Ay$ s konst. koeficienty

Hledám řešení tvaru $e^{\lambda x}v$, $v \in \mathbb{R}^n$

$$y' = Ay \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda x}v = A e^{\lambda x}v \Rightarrow Av = \lambda v, \text{ úloha na vl, čísla a vektory}$$

V (FS pro (7)):

Nt $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ různá vl. čísla A , alg. násobnost. $\nu_a(\lambda_i) = k_i$, $\sum_{i=1}^p k_i = n$, potom FS soustavy (7) je tvaru:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} y_{11}(x), & e^{\lambda_1 x} y_{12}(x) & \dots & e^{\lambda_1 x} y_{1k_1}(x) \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_p x} y_{p1}(x), & e^{\lambda_p x} y_{p2}(x) & \dots & e^{\lambda_p x} y_{pk_p}(x) \end{pmatrix},$$

kde $y_{ij}(x)$ je polynomiální fce stupně $< j$, $j = 1, \dots, k_i$

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DR 1. ŘÁDU

pozn. : $\mathbb{A}$ lze kvazidiagonalizovat

pomocí transformace $y = \mathbb{P}z \rightsquigarrow$ Jordanovy bloky typu

pro $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$,

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

$y' = \mathbb{A}y \rightsquigarrow z' = \mathbb{J}z$, tedy:

$$\begin{array}{lll} (z^1)' = \lambda z^1 & \text{a} & z(x) = e^{\lambda x} u(x) & \rightsquigarrow & (u^1(x))' = 0 \\ (z^2)' = \lambda z^2 + z^1 & & z'(x) = \lambda e^{\lambda x} u(x) + e^{\lambda x} u'(x) & & (u^2(x))' = u^1(x) \\ \vdots & & & & \vdots \\ (z^k)' = \lambda z^k + z^{k-1} & & & & (u^k(x))' = u^{k-1}(x) \end{array}$$



Lee Madgwick's "The fern"

Okrajová úloha pro ODR 2. řádu

Mějme typovou úlohu: ²

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \text{ na } (a, b), \text{ ozn. (1)}$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0,$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

kde: $p, p', q, f \in C([a, b])$

$$(\exists c_0 > 0)(\forall x \in [a, b])(p(x) \geq c_0 > 0)$$

$$|\alpha_i| + |\beta_i| > 0, \quad i = 1, 2$$

a zavedme názvosloví:

$p(x)$... difúzní koeficient

$q(x)$... reakční člen

$f(x)$... objemový zdroj

pozn. : $q = 0, \alpha_1, \alpha_2 = 0 \implies p(x)$ je určeno až na konst. $\implies \infty$ řešení

pozn. : (1) je lineární DR 2. řádu

$$-(p(x)y')' + q(x)y = -p(x)y'' - p'(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' - \frac{q(x)}{p(x)}y = -\frac{f(x)}{p(x)}$ ozn. (2) je lin. ODR 2. řádu, řešení hled. přes FS a variaci konst.

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' + \frac{q(x)}{p(x)}y = 0 \quad (2.2)$$

$$y(a) = \omega_1$$

$$y'(a) = \xi_1$$

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' + \frac{q(x)}{p(x)}y = 0 \quad (2.2)$$

$$y(a) = \omega_2$$

$$y'(a) = \xi_2$$

řešení $v_1(x)$ pro (2.1) a $v_2(x)$ pro (2.2) dle Picarda jednozn. ex.

tvrzení: Hodnoty $\omega_1, \xi_1, \omega_2, \xi_2$ lze volit tak, že (v_1, v_2) FS na $[a, b]$ a

$$\alpha_1 v_1(a) + \beta_1 v_1'(a) = 0 \wedge \alpha_2 v_1(b) + \beta_2 v_1'(b) \neq 0$$

$$\alpha_1 v_2(a) + \beta_1 v_2'(a) \neq 0 \wedge \alpha_2 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) = 0$$

dk: s použitím tvaru DR (1), Wronskián, následující analýza jednoznačnosti

pozn. : Wronskián pro (2):

$$W_{v_1, v_2}(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \stackrel{V}{=} W_{v_1, v_2}(x_0) \exp \left(- \int_{x_0}^x P(s) \, ds \right), \text{ kde } P(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{p'(x)}{p(x)} \, dx = \ln \frac{p(x)}{p(x_0)} \Rightarrow W_{v_1, v_2}(x) = W_{v_1, v_2}(x_0) \exp \left(- \ln \frac{p(x)}{p(x_0)} \right)$$

$$\Rightarrow p(x)W_{v_1, v_2}(x) = p(x_0)W_{v_1, v_2}(x_0) = \text{konst.}$$

²Dále již autor přestal vnímat a neví co píše. Přiznal však, že se k tomu vrátí.

OKRAJOVÁ ÚLOHA PRO ODR 2. ŘÁDU

Variace konst. pro úlohu (2):³

řešení bez pravé strany:

$$y(x) = c_1(x)v_1 + c_2(x)v_2$$

$$y'(x) = \underbrace{c_1'v_1 + c_2'v_2}_{=0} + c_1v_1' + c_2v_2'$$

$$y''(x) = c_1'v_1' + c_1v_1'' + c_2'v_2' + c_2v_2''$$

$$\text{dosadíme do } y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' - \frac{q(x)}{p(x)}y = -\frac{f(x)}{p(x)}$$

$$c_1'v_1' + c_1v_1'' + c_2'v_2' + c_2v_2'' + \frac{p'(x)}{p(x)}(c_1v_1' + c_2v_2') - \frac{q(x)}{p(x)}(c_1v_1 + c_2v_2) = -\frac{f(x)}{p(x)}$$

s vědomím, že: $c_i(v_i'' + \frac{p'}{p}v_i' - \frac{q}{p}v_i) = 0$, $i = 1, 2$ pak máme:

$$c_1'(x)v_1(x) + c_2'(x)v_2'(x) = 0$$

$$c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) = -\frac{f(x)}{p(x)}$$

s využitím Cramerovo pravidla

$$c_1'(x) = \frac{D_1(x)}{W_{v_1, v_2}(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{D_2(x)}{W_{v_1, v_2}(x)}, \quad D_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & v_2(x) \\ -\frac{f(x)}{p(x)} & v_2'(x) \end{vmatrix}, \quad D_2(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & 0 \\ v_1'(x) & -\frac{f(x)}{p(x)} \end{vmatrix}$$

$$c_1'(x) = \underbrace{\frac{f(x)v_2(x)}{p(x)W_{v_1, v_2}(x)}}_{:=k} \implies c_1(x) = \frac{1}{k} \int_b^x f(s)v_2(s) \, ds + E_1$$

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(x)W_{v_1, v_2}(x)} \implies c_1(x) = -\frac{1}{k} \int_a^x f(s)v_1(s) \, ds + E_2$$

$E_{1,2}$ z okrajových podmínek pro $y(x)$:

$$\alpha_1(c_1(a)v_1(a) + c_2(a)v_2(a)) + \beta_1(c_1(a)v_1'(a) + c_2(a)v_2'(a)) = 0,$$

$$\alpha_2(c_1(b)v_1(b) + c_2(b)v_2(b)) + \beta_2(c_1(b)v_1'(b) + c_2(b)v_2'(b)) = 0,$$

$$c_1(a) \underbrace{(\alpha_1v_1(a) + \beta_1v_1'(a))}_{=0} + c_2(a) \underbrace{(\alpha_1v_2(a) + \beta_1v_2'(a))}_{\neq 0} = 0$$

$$c_1(b) \underbrace{(\alpha_2v_1(b) + \beta_2v_1'(b))}_{\neq 0} + c_2(b) \underbrace{(\alpha_2v_2(b) + \beta_2v_2'(b))}_{=0} = 0$$

$$\implies c_2(a) = c_1(b) = 0 \implies E_{1,2} = 0$$

Pak:

$$y(x) = -\frac{1}{k} \left(\int_x^b f(s)v_2(s) \, ds \right) v_1(x) - \frac{1}{k} \left(\int_a^x f(s)v_1(s) \, ds \right) v_2(x) = \int_a^b G(x, s)f(s) \, ds$$

$$\text{kde } G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{k}v_1(s)v_2(x), & s \leq x, \\ -\frac{1}{k}v_1(x)v_2(s), & s > x. \end{cases}$$

³Opět může být nesmysl

OKRAJOVÁ ÚLOHA PRO ODR 2. ŘÁDU

Jednoznačnost:

Nechť y_1, y_2 řešení (1):

$$\begin{array}{ll} -(p(x)y_1')' + q(x)y_1 = f(x) & -(p(x)y_2')' + q(x)y_2 = f(x) \\ \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0 & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) = 0 \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) = 0 & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) = 0 \end{array}$$

odečtu:

$$\begin{array}{l} -(p(x)(y_1 - y_2)')' + q(x)(y_1 - y_2) = 0 \\ \alpha_1(y_1(a) - y_2(a)) + \beta_1(y_1'(a) - y_2'(a)) = 0 \\ \alpha_2(y_1(b) - y_2(b)) + \beta_2(y_1'(b) - y_2'(b)) = 0 \end{array}$$

ozn. $z(x) := y_1(x) - y_2(x)$

$$\begin{array}{ll} -(p(x)z')' + q(x)z = 0 & / \cdot z(x) / \int_a^b dx \\ \alpha_1 z(a) + \beta_1 z'(a) = 0 & \\ \alpha_2 z(b) + \beta_2 z'(b) = 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (-(p(x)z')' + q(x)z)z \, dx = - \int_a^b (p(x)z')'z \, dx + \int_a^b q(x)z^2 \, dx = \\ & \left| \begin{array}{ll} u = z & dv = (p(x)z')' \\ du = z' & v = p(x)z' \end{array} \right| = -[z(x)p(x)z'(x)]_a^b + \int_a^b p(x)(z')^2 \, dx + \int_a^b q(x)z^2 \, dx = \\ & \underbrace{\int_a^b p(x)(z')^2 \, dx}_{(1)} + \underbrace{\int_a^b q(x)z^2 \, dx}_{(2)} - \underbrace{z(b)z'(b)p(b)}_{(3)} + \underbrace{z(a)z'(a)p(a)}_{(4)} = 0 \end{aligned}$$

kde poslední rovnost je tzv. energetická rovnost

$$(1): \int_a^b p(x)(z')^2 \, dx \geq c_0 \int_a^b (z')^2 \, dx \geq 0$$

$$(2): \int_a^b q(x)z^2 \, dx \geq 0, \text{ požadavek navíc: } q(x) \geq 0$$

$$(3): \begin{cases} \alpha_2 \neq 0: & z(b) = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} z'(b) \rightarrow +\frac{\beta_2}{\alpha_2} p(b)(z'(b))^2 \geq 0 \quad \text{pro } \frac{\beta_2}{\alpha_2} \geq 0 \\ \beta_2 \neq 0: & z'(b) = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} z(b) \rightarrow +\frac{\alpha_2}{\beta_2} p(b)(z(b))^2 \geq 0 \quad \text{pro } \frac{\alpha_2}{\beta_2} \geq 0 \end{cases}$$

požadavek navíc: $\alpha_2 \beta_2 \geq 0$

OKRAJOVÁ ÚLOHA PRO ODR 2. ŘÁDU

$$(4): \begin{cases} \alpha_1 \neq 0 : & z(a) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} z'(a) \rightarrow -\frac{\beta_1}{\alpha_1} p(a)(z'(a))^2 \geq 0 \quad \text{pro } -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \geq 0 \\ \beta_1 \neq 0 : & z'(a) = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} z(a) \rightarrow -\frac{\alpha_1}{\beta_1} p(a)(z(a))^2 \geq 0 \quad \text{pro } -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \geq 0 \end{cases}$$

požadavek navíc: $\alpha_1 \beta_1 \leq 0$

V (O jednoznačnosti):

Řešení (1) je jednoznačné, pokud:

- platí základní předpoklady
- $q(x) \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \leq 0, \alpha_1 - \beta_1 > 0$
 $\alpha_2 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \alpha_2 + \beta_2 > 0$
- $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, (\exists x_0 \in \langle a, b \rangle)(q(x_0) > 0)$

Dk:

Z energetické rovnosti a předpokládaných nezáporností jednotlivých členů plyne, že všechny čtyři sčítance musí být rovny nule:

$$(1) = 0, \quad (2) = 0, \quad (3) = 0, \quad (4) = 0$$

Z podmínky $(1) = 0$ dostáváme:

$$\int_a^b p(x)(z')^2 dx = 0 \implies z'(x) = 0 \text{ na } \langle a, b \rangle \implies z(x) = F_0 \quad (\text{konstanta})$$

Rozlišme případy pro určení konst F_0 :

$$\beta_1 = 0 \vee \beta_2 = 0:$$

Z okrajových podmínek přímo plyne $z(a) = 0$ nebo $z(b) = 0$. Jelikož $z(x) = F_0$, znamená to, že $F_0 = 0 \implies z(x) \equiv 0$.

$$\beta_1 \neq 0 \wedge \beta_2 \neq 0:$$

$$\alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0:$$

Z podmínek $(3) = 0$ a $(4) = 0$, tj.

$$(3): p(b) \frac{\alpha_2}{\beta_2} (z(b))^2 = 0, \quad (4): p(a) \frac{\alpha_1}{\beta_1} (z(a))^2 = 0$$

dostáváme $z(a) = 0 \vee z(b) = 0$, což opět dává $F_0 = 0 \implies z(x) \equiv 0$.

$$\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0:$$

Pak automaticky $(3) = 0$ i $(4) = 0$. Využijeme tedy podmínku $(2) = 0$:

$$\int_a^b q(x) z^2(x) dx = 0 \implies F_0^2 \int_a^b q(x) dx = 0$$

OKRAJOVÁ ÚLOHA PRO ODR 2. ŘÁDU

Dle předpokladu existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že $q(x_0) > 0$. Ze spojitosti $q(x)$ je integrál kladný, a tedy musí platit $F_0 = 0 \Rightarrow z(x) \equiv 0$.

celkem: $z(x) = y_1(x) - y_2(x) = 0 \Rightarrow$ řešení je jednoznačné