DIFR

Tenhle dokument napsal DFK

Podpis: ____________________

Obsah

Úvodní pojmy a definice

Obyčejný diferenciální výraz n-tého řádu

Nť $F : \mathbb{R}^{\nvDash+\ltimes} \to \mathbb{R},\ F \in C^{(p)}(\mathbb{R}^{2+n}),\ n, p \in \mathbb{N}_0$.
Pak výraz $F(x, y, y^{'}, y^{''}, \dots, y^{(n)})$ se nazve obyč. dif. výraz n-tého řádu.

DEF (obyčejná diferenciální rovnice):

Nť $F(x, y, y^{'}, y^{''}, \dots, y^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$ je obyč. dif. výraz, $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Pak

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \forall x \in I \tag{1}$$

se nazve obyč. dif. rcí n-tého řádu, pokud je $y^{(n)}$ v ní netriviálně přítomná.
Fce $y = y(x)$ řeší (1), když bodově platí $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ $\forall x \in I$.
Řešení $y = y(x)$ rovnice (1) je jednoznačné, pokud pro každé jiné řešení $z = z(x)$ na $J \subset I$ platí $(\forall x \in I \subset J)(y(x) = z(x))$

Pozn. : Doplňující info pro (1):

1. Poč. podmínky: tj. hodnoty řešení, př. derivací pro (1) jsou zadané v jediném bodě $x_0 \in I : y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$
2. Okr. podmínky: tj. hodnoty y, y',…, $y^{(n-1)}$ jsou zadávány v různých bodech I
3. Ostatní podmínky: např. integrální

Pozn. : Rozlišujeme úpravy rnic (1):

- algebraické (*násobení, dělení …*)
- funkční (*substituce*)

Řekneme, že DR1 je ekv. upravena na DR2, pokud se nezmění množina řešení.
př. $xy' = y^2 - y$ je bez omezení na hodnoty x, y, y',
po alg. úpravě $\frac{y'}{y^2-y} = \frac{1}{x}$ dostáváme omezení $x \neq 0,\ y^2 - y \neq 0$
tedy $y(x) \equiv 0$ a $y(x) \equiv 1$ řeší první, ale neřeší druhou DR

Existenční teorie

Budeme uvažovat rovnice v komkrétnějším tvaru než je (1)

DEF (ODR v normálním tvaru):

Nť $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ Rovnici
$$y' = f(x, y) \tag{2}$$
nazvu obyč. dif. rce v norm tvaru
Použitím podmínky $y(x_0) = y_0$ získáme poč. úlohu pro ODR v norm. tvaru.

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{3}$$

na $I \subset \mathbb{R}$, kde I je interval

Pozn. : Řešení (3) najdeme pomocí konstrukce vhodné fční posl. a prokázání její vhodné konvergence.

DEF (stejná omezenost):

Nť $I \subset \mathbb{R}$ je omez. interval, $M = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ je fce na I}\}$
Fce z M jsou stejně omez. na I, pokud
$(\exists K > 0)(\forall f \in M)(\forall x \in I)(|f(x)| \leq K)$

DEF (stejně spojité funkce):

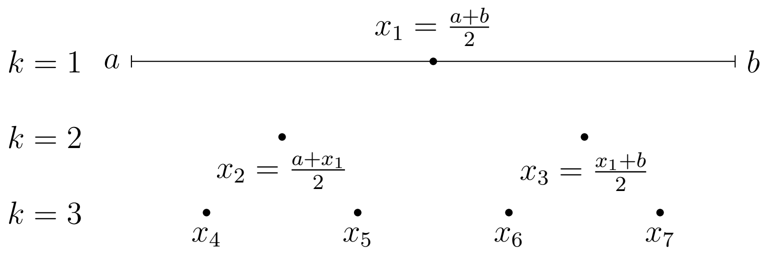
Fce z M jsou stejně spojité, pokud
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in I), |x' - x''| < \delta)(\forall f \in M)(|f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$

Pozn. : Víme z Bolzano-Weistrasse, že každá omezená posl vektorů LP konečné dim. má konvergentní podposloupnost.

V (Arzelova):

Nť $I \subset \mathbb{R}$ je <u>omez.</u> interval, M je mn. stejně omez., stejně spoj. fcí na I. Pak z každé posl. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ lze vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost na I.

DK:
Krok 1: Konstrukce spočetné množiny $\mathcal{P}$ na intervalu $I = (a, b)$



Celkem vznikne spočetná množina $\mathcal{P} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ s vlastností (P):
$(\forall\ x^* \in I)(\forall\ \varepsilon_0 > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon_0 \wedge \exists\ l \in \mathbb{N} : x_l \in \mathcal{P} \cap (x^* - \varepsilon_0, x^* + \varepsilon_0))$

Krok 2: Posloupnost $\{g_n\}$ vyčíslíme v bodech z množiny $\mathcal{P}$

<u>l=1</u>: vyčíslíme $\{g_n(x_1)\}$:
g_n jsou stejně omezené fce $\Leftrightarrow (\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(|g_n(x)| < K)$
$\underset{spec.\ pro\ x_1}{\Longrightarrow}$ $(\forall n \in \mathbb{N})(-K \leq g_n(x_1)) \leq K)$, tzn. $(\forall n \in \mathbb{N})(g_n(x_1) \in [-K, K])$
$\underset{Bolz.-Weie.}{\Longrightarrow}$ $\exists$ vybraná konvergentní podposloupnost ozn. $\{g_n^{(1)}(x_1)\}$
vzniká vybraná fční podposl. $\{g_n^{(1)}(x)\}$, která v $x = x_1$ konverguje (bodově)

<u>l=2</u>: vyčíslíme $\{g_n^{(1)}(x_2)\}$:
$\underset{spec.\ pro\ x_2}{\Longrightarrow}$ $(\forall n \in \mathbb{N})(-K \leq g_n(x_2)) \leq K)$, tzn. $(\forall n \in \mathbb{N})(g_n^{(1)}(x_2) \in [-K, K])$
$\underset{Bolz.-Weie.}{\Longrightarrow}$ $\exists$ vybraná konvergentní podposloupnost z $\mathbf{g_n^{(1)}(x_2)}$ ozn. $\{g_n^{(2)}(x_2)\}$
vzniká vybraná fční podposl. $\{g_n^{(2)}(x)\}$, která v $x = x_1$, $x = x_2$ konverguje (bodově)

<u>$l = l_0$</u>: vyčíslíme $\{g_n^{(l_0-1)}(x_{l_0})\}$:
$\underset{Bolz.-Weie.}{\Longrightarrow}$ $\exists$ vybraná konvergentní podposloupnost ozn. $\{g_n^{(l_0)}(x_{l_0}\}$
vzniká vybraná fční podposl. $\{g_n^{(l_0)}(x)\}$, která v $x \in \{x_1, \ldots, x_{l_0}\}$ konverguje (bodově)

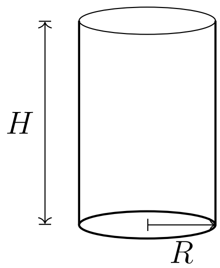
Krok 3: Diagonální výběr: uvážíme posl. $\{g_n^{(n)}(x)\}$

trvzení: Posloupnost $\{g_n^{(n)}(x)\}$ konverguje na I stejnoměrně
dk: chci B-C: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(|g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_n^{(n)}(x)| < \varepsilon)$
pro pevné $x = x_{l_0}$ číselná posl. $\{g_n^{(n)}(x)\}_{n=l_0}^{\infty}$ konverguje

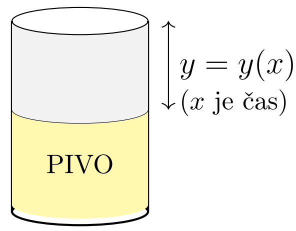
proto pro lib. $l \in \mathbb{N} : |g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_n^{(n)}(x)| \overset{\pm g_{n+p}^{(n+p)}(x_l) \pm g_n^{(n)}(x_l)}{\leq}$
$$\underbrace{|g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_{n+p}^{(n+p)}(x_l)|}_{(1)} + \underbrace{|g_{n+p}^{(n+p)}(x_l) - g_n^{(n)}(x_l)|}_{(2)} + \underbrace{|g_n^{(n)}(x_l) - g_n^{(n)}(x)|}_{(3)}$$
(2): bodová konvergence $\{g_n^{(n)}(x_l)\}$ pro pevné $x = x_l$:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_l)(\forall n \geq n_l)(\forall p \in \mathbb{N})(|g_{n+p}^{(n+p)}(x_l) - g_n^{(n)}(x_l)| < \frac{\varepsilon}{3}$
(1) a (3): stejná spojitost $\{g_n^{(n)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta)(\forall n \in \mathbb{N}(|g_n(x') - g_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{3})$
s využitím vlastnosti (P)

$(1) + (2) + (3) \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow$ BC podmínka platí a $\exists g_n : I \to \mathbb{R},\ g_n^{(n)} \overset{I}{\rightrightarrows} g.$

K čemu potřebují japonští studenti v české restauraci číslo π a e?



Sklenice od piva



Detail pěna

Uvažujme úbytek výšky pěny $y(x)$ v čase x. Předpokládáme, že rychlost rozpadu je přímo úměrná aktuálnímu množství pěny:

$$y' = -\alpha y, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad y(0) = y_0 \tag{0}$$

Numerický přístup (Diskretizace):
Zvolíme dělící body času $x_k = kh$, kde h je délka kroku. Nahradíme derivaci $y'(x_k)$ diferencí:

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -\alpha y_k \implies y_{k+1} = (1 - \alpha h)y_k$$

Pro k-tý krok dostáváme rekurentní vztah:

$$y_m = (1-\alpha h)^{k+1} y_0 \tag{Δ}$$

Vztah (0) a (Δ):
Zvolme pevný čas x^* a rozdělme interval $[0, x^*]$ na m bloků o velikosti $h = \frac{x^*}{m}$.
Pak aproximace y_m v čase x^* vypadá takto:

$$y_{k+1} = \left(1 - \alpha\frac{x^*}{m}\right)^m y_0 = \left[\left(1 - \frac{\alpha x^*}{m}\right)^{\frac{m}{\alpha x^*}}\right]^{\alpha x^*} y_0 \xrightarrow{m\to\infty} e^{-\alpha x^*} y_0$$

Závěr:
Číslo π potřebují k výpočtu objemu válcové sklenice ($V = \pi R^2 h$) a Eulerovo číslo e k popisu toho, jak jim ta pěna před očima mizí (exponenciální rozpad).

V (Peanova):

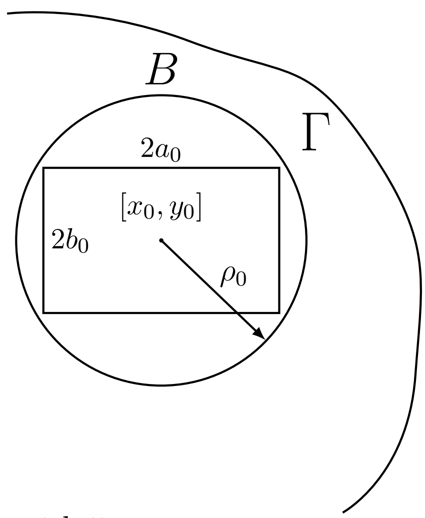
Nť $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, $f \in C(\Gamma)$, $[x_0, y_0] \in \Gamma$
Pak $\exists\, a_0 > 0$ a zobr. $\varphi : [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \to \mathbb{R}$, která řeší (3)

Krok 1: Konstrukce uz. množiny kolem bodu $[x_0, y_0]$:

$[x_0, y_0] \in \Gamma \overset{\Gamma\subset\mathbb{R}^2}{\Longrightarrow} (\exists \rho_0)(B = \overline{B_{[x_0,y_0]}(\rho_0)} \in \Gamma)$.
B je uzavřená a omezená, B $\subset \mathbb{R}^2 \overset{Heine-Borel}{\Longrightarrow}$ B kompakt.

$f \in C(\Gamma) \Longrightarrow f \in C(B)$, B komp. $\Longrightarrow$ f nabývá sup a inf, tedy je omezená: $(\exists M > 0)(\forall [x, y] \in B)(|f(x, y)| \leq M)$.

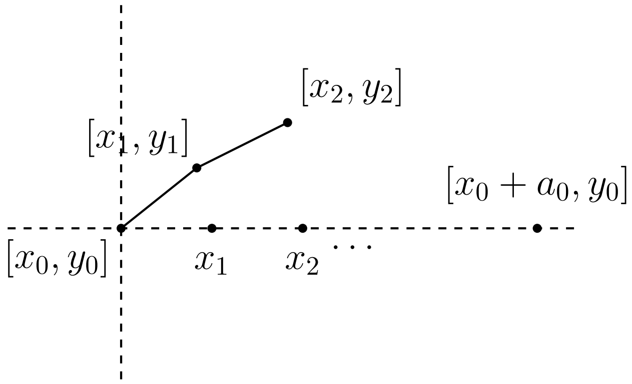
Pak zvolíme obdélník $\mathcal{O}$
$\mathcal{O} = \{[x, y] \in B \mid |x - x_0| \leq a_0, |y - y_0| \leq b_0\}$
tak, aby $a_0 M \leq b_0$. $(*)$



Krok 2: Konstrukce posl. tzv. Eulerových lomených čar
Pro $m \in \mathbb{N}$ rozděláme $[x_0, x_0 + a_0]$ na m stejných částí pomocí bodů $x_k = x_0 + kh$, $h = \frac{a_0}{m}$ (anal. pro $[x_0 - a_0, x_0]$). Nahradíme derivaci $y'(x_0) \sim \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$ diferencí, odtud $y(x_1) \sim y(x_0) + hf(x_0, y_0)$. Ozn. $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ aproximaci $y(x_1)$.
Anal. $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \dots, y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), j \in \widehat{m-1}$

Def. Eulerovu lomenou čáru:

$\varphi_m(x) = y_j + \overset{\approx h}{\underline{(x - x_j)}} f(x_j, y_j)$ pro $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j \in \widehat{m-1}$ Tím vzniká fční posl. $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ def. na $[x_0, x_0 + a_0]$,zrcadlově zopakujeme též pro $[x_0 - a_0, x_0]$, tj. na celém $[x_0 - a_0, x_0 + a_0]$



Krok 3: vlastnosti $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$:
lemma: Posl. $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ obsah. stejně omez. fce
dk: Odhadujeme $|\varphi_m(x) - y_0| =$

$\{x \in [x_0, x_1]\} = |y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0) - y_0| = |\underbrace{(x - x_0)}_{\leq h} \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\leq M}| \leq \underbrace{h}_{\leq a_0} M \leq a_0 M \overset{(*)}{\leq} b_0$

$\{x \in [x_1, x_2]\} = |y_1 + (x - x_1) f(x_1, y_1) - y_0| \overset{\Delta}{\leq} \underbrace{|y_1 - y_0|}_{\leq hM} + |\underbrace{(x - x_1)}_{\leq h} \underbrace{f(x_1, y_1)}_{\leq M}|$

$\leq \underbrace{2h}_{\leq a_0} M \leq a_0 M \leq b_0$

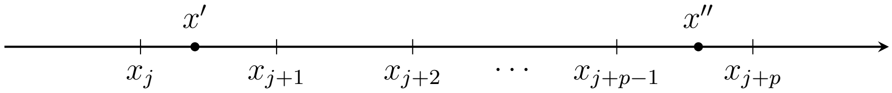
$\vdots$

$\{x \in [x_j, x_{j+1}]\} = |y_j + (x - x_j) f(x_j, y_j) - y_0| \overset{\Delta}{\leq} \underbrace{|y_j - y_0|}_{\leq jhM} + |\underbrace{(x - x_j)}_{\leq h} \underbrace{f(x_j, y_j)}_{\leq M}|$

$\leq \underbrace{(j+1)h}_{\leq a_0} M \leq a_0 M \leq b_0$

Dostáváme $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [x_0, x_0 + a_0])(|\varphi_m(x) - y_0| \leq b_0) \iff$
$-b_0 \leq \varphi_m(x) - y_0 \leq b_0 \iff -b_0 + y_0 \leq \varphi_m(x) \leq b_0 + y_0 \implies |\varphi_m(x)| \leq |y_0| + b_0$

lemma: Posl. $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ obsah. stejně spoj. fce



dk: Chceme: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in [x_0 - a_0, x_0 + a_0], |x' - x''| < \delta)$ $(\forall m \in \mathbb{N})(|\varphi_m(x') - \varphi_m(x'')| < \varepsilon)$

$|\varphi_m(x') - \varphi_m(x'')| = |\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| = |\varphi_m(x'') - y_{j+p-1} + y_{j+p-1} - y_{j+p-2} + y_{j+p-2} - \ldots - y_{j+1} + y_{j+1} - \varphi_m(x')| \overset{\Delta}{\leq}$
$\underbrace{|\varphi_m(x'') - y_{j+p-1}|}_{(p-1)} + \underbrace{|y_{j+p-1} - y_{j+p-2}|}_{(p-2)} + \ldots + \underbrace{|y_{j+2} - y_{j+1}|}_{(1)} + \underbrace{|y_{j+1} - \varphi_m(x')|}_{(0)}$ $(\square)$

(p-1): $x'' \in [x_{j+p-1}, x_{j+p}] \Rightarrow |\varphi_m(x'') - y_{j+p-1}| =$
$|y_{j+p-1} + (x'' - x_{j+p-1})\underbrace{f(x_{j+p-1}, y_{j+p-1})}_{\leq M} - y_{j+p-1}| \leq (x'' - x_{j+p-1})M$

(1) - (p-2): $l \in \widehat{p-2} : |y_{j+l+1} - y_{j+l}| = |h\underbrace{f(x_{j+l}, y_{j+l})}_{\leq M}| \leq hM$

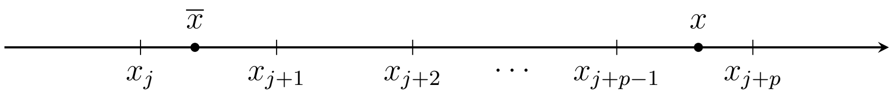
(0): $x' \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow |y_{j+1} - \varphi_m(x)| = |y_j + hf(x_j, y_j) - (y_j + (x' - x_j)f(x_j, y_j))|$
$= |(h - x' + x_j)f(x_j, y_j)| \overset{x_j + h = x_{j+1}}{=} |(x_{j+1} - x')\underbrace{f(x_j, y_j)}_{\leq M}| \leq (x_{j+1} - x')M$

$(\square) \leq (x'' - x_{j+p-1})M + \underbrace{hM + \ldots + hM}_{(p-2)\text{ krát}} + (x_{j+1} - x')M = (x'' - x')M$

celkem $|\varphi_m(x') - \varphi_m(x'')| \leq |x'' - x'|M \leq \varepsilon$, pro $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

pozn: $\{\varphi_m\}$ je stejně omez. a stejně spoj, na omez. int. $[x_0 - a_0, x_0 + a_0] \overset{Arzelo}{\Longrightarrow}$
$\exists$ vybraná posl. $\{\varphi_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} : \varphi_m \rightrightarrows \varphi^*$ na $[x_0 - a_0, x_0 + a_0]$

Krok 4: φ^* řeší (3)
lemma: fce na φ^* řeší (3) $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$
dk: a) φ^* splň. poč. podm. $y(x_0) = y_0 : (\forall m \in \mathbb{N})(\varphi_m(x_0) = y_o)$ ✓
b) $y' = f(x, y) \Leftrightarrow |y' - f(x, y)| < \varepsilon$: ukážeme $(\forall \overline{x} \in (x_0 - a_0, x_0 + a_0))$
$(\forall \overline{\varepsilon} > 0)(\exists \overline{\delta} > 0)(\forall x, |x - x'| < \overline{\delta})(|\frac{\varphi^*(x) - \varphi^*(\overline{x})}{x - \overline{x}} - f(\overline{x}, \varphi^*(\overline{x}))| < \overline{\varepsilon})$ $\quad / \cdot |x - \overline{x}|$
$|\varphi^*(x) - \varphi^*(\overline{x}) - (x - \overline{x})f(\overline{x}, \varphi^*(\overline{x}))| \overset{?}{<} \overline{\varepsilon}$



Místo φ^* zkoumejme napřed φ_m :

$$|\varphi_m(x)-\varphi_m(\overline{x})-(x-\overline{x})f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x}))| = |\underbrace{\varphi_m(x)}_{\cancel{y_{j+p-1}}+(x-x_{j+p-1})f(x_{j+p-1},y_{j+p-1})} - \cancel{y_{j+p-1}} + \overbrace{y_{j+p-1}}^{\cancel{y_{j+p-2}}+hf(x_{j+p-2},y_{j+p-2})} - \cancel{y_{j+p-2}}$$

$$+\ldots+\underbrace{y_{j+2}}_{\cancel{y_{j+1}}+hf(x_{j+1},y_{j+1})} - \cancel{y_{j+1}} + \overbrace{y_{j+1}}^{\cancel{y_j}+hf(x_j,y_j)=\cancel{y_j}+(x_{j+1}-\overline{x})f(x_j,y_j)} - \underbrace{\varphi_m(\overline{x})}_{\cancel{y_j}+(\overline{x}-x_j)f(x_j,y_j)} - \overbrace{(x-\overline{x})}^{(x-x_{j+p-1})+h+\ldots+h+(x_{J+1}-\overline{x})} f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x})| = |(\underbrace{\overline{x}+\overline{h}}_{x} - x_{j+p-1})$$

$$(f(x_{j+p-1},y_{j+p-1})-f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x})))+h(f(x_{j+p-2},y_{j+p-2})-f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x})))+\ldots+$$

$$h(f(x_{j+1},y_{j+1})-f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x})))+(x_{j+1}-\overline{x})(f(x_j,y_j)-f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x})))| \overset{\Delta}{\leq}$$

pozn: $B=\overline{B}\subset\Gamma$ a $f\in C(B) \implies f$ je na B spoj. stejnoměrně tj. $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta_0>0)(\forall(x',y'),(x'',y'')\in B)(|x'-x''|<\delta_0,|y'-y''|<\delta_0)$ $(|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon)$. Navíc je $\{\varphi_m\}$ stejně spoj. tj. pro $\delta_0>0$ $\exists\delta_1>0$: pro $x',x'',|x'-x''|<\delta_1 \Rightarrow |\varphi_m(x')-\varphi_m(x'')|<\delta_0$. Ozn. $\delta=min\{\delta_0,\delta_1\}$, pak pro $|\overline{h}|=|x-\overline{x}|<\delta$ platí:

$$\overset{\Delta}{\leq} (\overline{x}+\overline{h})|f(x_{j+p-1},y_{j+p-1})-f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x}))|+h|f(x_{j+p-2},y_{j+p-2})-f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x}))|$$
$$+\ldots+h|f(x_{j+1},y_{j+1})-f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x}))|+(x_{j+1}-\overline{x})|f(x_j,y_j)-f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x}))|<$$
$$(\overline{x}+\overline{h}+h\ldots+h+x_{j+1}-\overline{x})\varepsilon$$

tj. $(\forall\varepsilon>0)(\forall(x_0-a_0,x_0+a_0))(\forall|\overline{h}|=|x-x'|<\delta)(\forall m\in\mathbb{N})$
$(|\varphi_m(\underbrace{\overline{x}-\overline{h}}_{x})-\varphi_m(\overline{x})-\overline{h}f(\overline{x},\varphi_m(\overline{x}))|<\varepsilon) \overset{\text{pro vybrané } k_m\to\infty}{\longrightarrow}$
$(|\varphi^*(\overline{x}-\overline{h})-\varphi^*(\overline{x})-\overline{h}f(\overline{x},\varphi^*(\overline{x}))|<\varepsilon)$

pozn: $\{\varphi_n\}$ jsou stejně omez. a stejně spoj. fce na $[x_0-a_0,x_0+a_0]$ a zde také konverguje $\varphi_{k_n} \overset{[x_0-a_0,x_0+a_0]}{\rightrightarrows} \varphi^*$ a f má potřebné vlasnosti na B, tj. $\lim\limits_{x\to\overline{x}}\left(\frac{\varphi^*(x)-\varphi^*(\overline{x})}{x-\overline{x}}-f(\overline{x},\varphi^*(\overline{x}))\right)=0$ i jednostranně v bodech x_0-a_0, x_0+a_0.

Tedy: φ^* splňuje (3) na $[x_0-a_0,x_0+a_0]$

Příklady k Peanově větě:

Existence bez jednoznačnosti (Peano's brush) Uvažujme ODR v normálním tvaru $y' = f(x, y)$:

$$y' = \sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Funkce $f(x, y) = y^{2/3}$ je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$, čímž jsou naplněny předpoklady Peanovy věty a existence řešení je tak zaručena. Jelikož je však spojitost pouze podmínkou postačující pro existenci, nikoliv pro jednoznačnost, a daná funkce není v počátku lokálně lipschitzovská, připouští tato úloha nekonečně mnoho řešení.
Vedle triviálního řešení $y = 0$ existuje nenulová větev $y = \frac{1}{27}(x-C)^3$, přičemž jejich libovolné kombinace vytvářejí útvar zvaný *Peano's brush.*

Nespojitá fce (Peano jako implikace)
Uvažujme počáteční úlohu s počáteční podmínkou:

$$y' = \operatorname{sgn}(y) \quad y(x_0) = y_0$$

Snadno ověříme jednoznačnost integrací: pro libovolný bod $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ ¨ dostáváme:

- Pro $y_0 > 0$: $y' = 1 \implies y(x) = x - x_0 + y_0$ pro $x > x_0 - y_0$.
- Pro $y_0 < 0$: $y' = -1 \implies y(x) = -(x - x_0) + y_0$ pro $x > x_0 + y_0$.
- Pro $y_0 = 0$: $y(x) = 0$ je řešením pro $x \in \mathbb{R}$.

Výpočtem jsme ověřili existenci i jednoznač. řešení pro všechna $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$. Ačkoliv řešení existuje, funkce $f(x, y) = \operatorname{sgn}(y)$ není spojitá ($f \notin C(\mathbb{R}^2)$), tudíž nejsou splněny požadavky Peanovy věty. Pokud není splněn předpoklad spojitosti, věta "mlčí"a o existenci či jednoznačnosti řešení nic nevypovídá; ty jsou zde důsledkem jiných vlastností systému, nikoliv aplikací Peanova tvrzení.

V (Osgoodova o jednoznačnosti):

Nť $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, dále nť $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, $f \in C(\Gamma)$ má vlastnost
$(\forall [x, y_1], [x, y_2] \in \Gamma)(|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \Phi(|y_2 - y_1|))$, (o)
kde $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ je fce spojitá a kladná na $\mathbb{R}^+$, $\Phi(0) = 0$.

Dále nť pro nějaké $c > 0$ je $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{\varepsilon}^{c} \frac{du}{\Phi(u)} = +\infty$.

Pak poč. úloha (3) má nejvýše jedno řešení.

DK:

Nť $\varphi = \varphi(x)$ řeší (3) na $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$

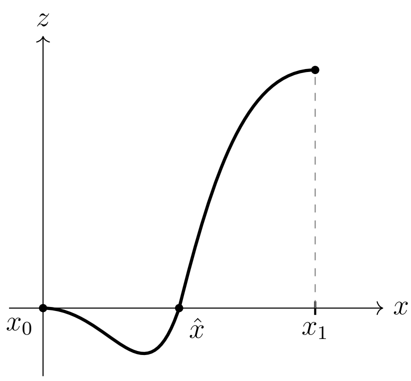
$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$
$$\varphi(x_0) = y_0$$

a $\psi = \psi(x)$ řeší (3) na $(x_0 - a_1, x_0 + a_1)$

$$\psi'(x) = f(x, \psi(x))$$
$$\psi(x_0) = y_0$$

ozn. $z = z(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ a předp. $(\exists x_1 > x_0)(z(x_1) = \varphi(x_1) - \psi(x_1) > 0)$
pak $(\exists \hat{x} \in [x_0, x_1))(\forall x \in [\hat{x}, x_1])(z(x) > 0)$

Ozn. $z = z(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ a předp.
$(\exists x_1 > x_0)(z(x_1) = \varphi(x_1) - \psi(x_1) > 0)$,
pak $(\exists \hat{x} \in [x_0, x_1))(\forall x \in [\hat{x}, x_1])(z(x) > 0)$.



$z'(x) = f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) \leq \Phi(\varphi(x) - \psi(x)) = \Phi(z(x))$ pro $x \in (\hat{x}, x_1]$
pro (o): $z'(x) \leq \Phi(|z(x)|)$ a pro $x \in [\hat{x}, x_1]$ platí $\frac{z'(x)}{\Phi(z(x))} \leq 1$ $\quad / \int_{x}^{x_1}$, $x > \hat{x}$

$$z(\hat{x}) = 0$$

$\int\limits_{z(x)}^{z(x_1)} \frac{du}{\Phi(u)} dx \leq (x_1 - x)$, $x \to \hat{x}_+ \Rightarrow z(x) \to z(\hat{x}) = 0_+ \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to \hat{x}_+} \int\limits_{z(x)}^{z(x_1)} \frac{du}{\Phi(u)} \leq (x_1 - \hat{x}) \ni \mathbb{R}$ spor s předp.

Pozn. : Jak bude vypadat fce Φ?

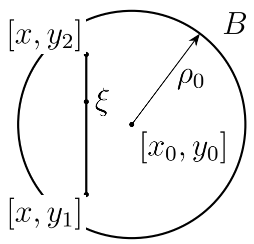
1. $\Phi(u) = ku,\ u \in \mathbb{R}_0^+, k > 0 : \int\limits_{\varepsilon}^{c_1} \frac{du}{ku} = \frac{1}{k} \ln \frac{c_1}{\varepsilon} = +\infty$

2. $\Phi(u) = ku|\ln u|,\ u \in \mathbb{R}_0^+, k > 0 :$
$$\int\limits_{\varepsilon}^{c_1} \frac{du}{ku|\ln u|} \overset{\text{nť } c_1>0}{=} \{v = \ln u\} = \Big|\frac{1}{k} \int\limits_{|\ln\varepsilon|}^{|\ln c_1|} \frac{dv}{|v|}\Big| = \frac{1}{k} \int\limits_{\varepsilon}^{c_1} \frac{dv}{v} = \frac{1}{k} \frac{|\ln\varepsilon|}{|\ln c_1|} \overset{\varepsilon \to 0_+}{\to} +\infty$$

Pozn. : Souvislost Osgoodovy podmínky a lokální lipschitzovskosti

Uvažujme volbu funkce Φ ve tvaru $\Phi(u) = ku$.
Nť navíc $f(x,y)$ má v Γ spojitou parciální derivaci podle y, tj. $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Gamma)$.
Nť $[x_0, y_0] \in \Gamma$, zvolme komp. $B = \overline{B([x_0, y_0], \rho_0)}$, dále nť $[x, y_1], [x, y_2] \in B$.

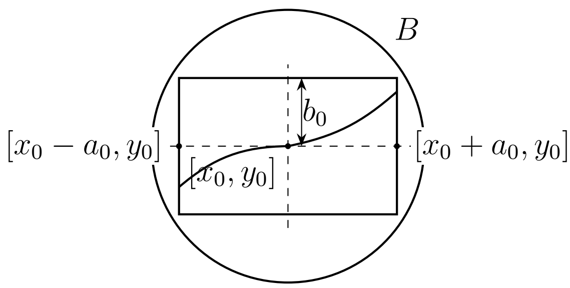
Ozn. $g(s) = f(x, y_1 + s(y_2 - y_1))$,
z předp. $g \in C^{(1)}([0,1]) \implies$
$g(1) - g(0) = f(x, y_2) - f(x, y_1) =$
$g'(\xi)(1-0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + \xi(y_2 - y_1))(y_2 - y_1)$,
kde $\xi \in (0,1)$.



$\frac{\partial f}{\partial y} \in C(B)$ a B komp. $\implies \exists K > 0 :$
$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \leq K$

Pak $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K|y_2 - y_1| \ldots$ tzv. *lokální lipschitzovskost f vzhledem k y.*

Pozn. : Rozsah def. oboru řešení $\varphi = \varphi(x)$, které zaručuje Peanova věta je lokální, tj. $\varphi : [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \to [y_0 - b_0, x_0 + b_0]$



Lokální existence a prodlužování řešení

1) **Lineární ODR:** $\left.\begin{array}{l} y' = ay, \quad a \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\} \implies y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$, pro $x \in \mathbb{R}$

2) **Separovatelné ODR:** $\left.\begin{array}{l} y' = 1 + y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\} \implies \int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = x - x_0$

Výpočtem získáme řešení: $y(x) = \tan \underbrace{(x - x_0 + \arctan y_0)}_{\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,+\frac{\pi}{2}+k\pi),\ k\in\mathbb{Z}}$

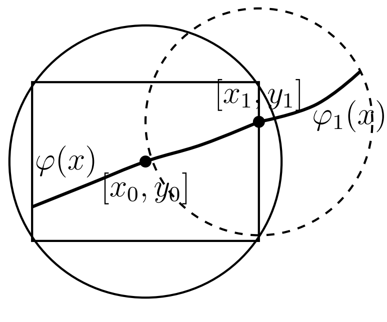
Hodnota $k \in \mathbb{Z}$ je určena tak, aby počáteční podmínka y_0 ležela v příslušné větvi tangencu, tedy $y_0 \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, +\frac{\pi}{2} + k\pi)$. Skutečný definiční obor řešení je otevřený interval $(x_0 - \frac{\pi}{2} + k\pi, x_0 + \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Peanova věta však garantuje existenci pouze na uzavřeném int. $[x_0 - a_0, x_0 + a_0]$, který může být (a často bývá) menší.

Úloha nám dává **otevřený** interval, zatímco Peano jen **uzavřený**. Musíme se tedy zabývat možností rozšíření (prodloužení) lokálního řešení. Vezm. hodnoty řešení na konci $\begin{array}{l} y_1 = \varphi(x_0 + a_0) \\ \hat{y}_1 = \varphi(x_0 - a_0) \end{array}$ a použijme je jako nové poč. podm.,

ozn. $x_1 = x_0 + a_0$ a zpracujme poč. úlohu $\begin{array}{l} y_1 = \varphi(x_0 + a_0) \\ \hat{y}_1 = \varphi(x_0 - a_0) \end{array}$ $(3)_1$

Dle Peanovy věty existuje okolí $B_1 = B([x_1, y_1], \rho_1)$ a nové řešení $\varphi_1(x)$ na intervalu $[x_1 - a_1, x_1 + a_1]$. Tímto jsme provedli tzv. **prodloužení doprava** (anal doleva). Tento postup lze opakovat: vznikají řešení φ_k na intervalech $[x_k, x_k + a_k]$, čímž se původní řešení $\varphi(x)$ rozšiřuje na sjednocený interval $[x_0 - a_0, x_k + a_k], k \in \mathbb{N}$.

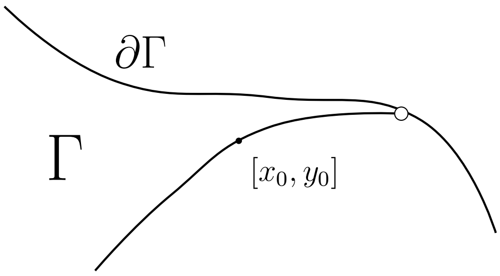
Tím vzniká otázka: Kdy a jak toto prodlužování skončí? (Např. nárazem na hranici definičního oboru funkce nebo únikem řešení do nekonečna.)



DEF (Prodloužitelná funkce):

Nť $\varphi = \varphi(x)$ řeší úlohu (3) na int. $[\alpha, \beta]$, kde $x_0 \in [\alpha, \beta]$
Řekneme, že φ je prodloužitelná doprava (anal. doleva),
pokud $\exists$ řešení $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ úlohy (3) na $[\alpha_1, \beta_1]$, kde $\alpha_1 \leq \alpha$ a $\beta_1 > \beta$
tak, že $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ pro $x \in [\alpha, \beta]$

Řešení je neprodloužitelné doprava, pokud není prodloužitelné doprava (nelze prodloužit za β)



V(Kritéria neprodloužítelnosti):

Nť $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $[x_0; y_0] \in \Gamma$, $f \in C(\Gamma)$.
Řešení $\varphi = \varphi(x)$ úlohy (3) je na int. $(\alpha, \beta), x_0 \in (\alpha, \beta)$ neprodlouž.
doprava $\Longleftrightarrow$ platí alespoň jedna z násl. podmínek:

1. $\beta = +\infty$
2. $\varphi(x)$ na levém okolí β není omez.
3. $\lim\limits_{x \to \beta_+} \rho([x, \varphi(x)] \,|\, \partial\Gamma) = 0$

DK:
1) $(\Leftarrow)$: $\beta = +\infty$ nenajdu větší β_1, a tedy z def. neprodlouž.

2) $(\Leftarrow)$: tvrzení budeme dokazovat obrácenou implikací, tedy předp., že φ lze prodloužit $\Rightarrow$ φ lze vyčíslit v $x = \beta \Rightarrow [\beta; \varphi(\beta)] \in \Gamma \Rightarrow \varphi, \varphi'$ spoj. v $x = \beta \Rightarrow \varphi$ omez. na okolí β

3) $(\Leftarrow)$: předp., že φ lze prodloužit $\Rightarrow$ $[x, \varphi(x)]|_{x=\beta}$ lze použít jako poč. podm. pro prodlužování doprava, tj $[\beta, \varphi(\beta)] \in \Gamma$. Víme, že metrika ρ je spojitá $\Rightarrow 0 = \lim\limits_{x \to \beta^-} \rho([x; \varphi(x)] \,|\, \partial\Gamma) = \rho([\beta; \varphi(\beta)] \,|\, \partial\Gamma) \Rightarrow [\beta; \varphi(\beta)] \in \overline{\partial\Gamma}$,
$\partial\Gamma = \overline{\Gamma} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma}$ je uz. $\Rightarrow [\beta; \varphi(\beta)] \in \partial\Gamma$ spor $(\Gamma \cap \partial\Gamma = \emptyset)$

($\Rightarrow$) Důkaz provedeme sporem pro všechna kritéria najednou.
Nť $\varphi = \varphi(x)$ je neprodlouž. řešení a zároveň platí $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$
Z $\neg(1) : \beta \in \mathbb{R}$ ($\beta = -\infty$ triv.), podle lemmatu $(*)$ $y = \lim\limits_{x \to \beta^-} \varphi(x) \in \mathbb{R}$
Z $\neg(3) = \neg(\lim\limits_{x \to \beta^-} \rho([x, \varphi(x)], \partial\Gamma) = 0) \Rightarrow$ lim buď neexistuje, nebo má jinou hodnotu. Ze spojitosti ρ pak $\lim\limits_{x \to \beta^-} \rho([x, \varphi(x)], \partial\Gamma) = \rho([\beta, y], \partial\Gamma)$, tzn. lim ex. (a má jinou hodn.). Ozn. $0 < \rho_0 \equiv \lim\limits_{x \to \beta^-} \rho([x, \varphi(x)], \partial\Gamma) = \rho([\beta, y], \partial\Gamma)$ z toho rovnou plyne $[\beta, y] \in \Gamma \Rightarrow [\beta, y]$ lze použít jako poč. podm. (3) a řešení φ tak prodloužit - spor.

$(*)$ Lemma

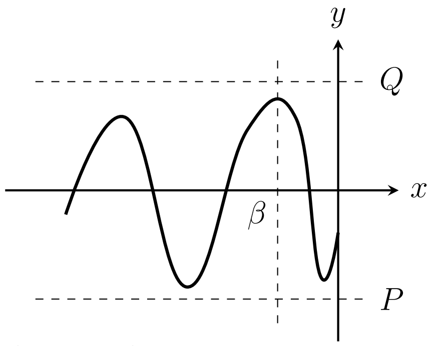
Nť platí předp. Peanovy věty, φ je neprodlouž. doprava na $(\alpha, \beta), x_0 \in (\alpha, \beta)$ a platí $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$. Potom $\lim\limits_{x \to \beta^-} \varphi(x)$ existuje a je realná.

DK: Předp. $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ je oblast, $[x_0, y_0] \in \Gamma$, $f \in C(\Gamma)$, φ neprodl. doprava, $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$. Sporem nť dále neex. $\lim\limits_{x \to \beta^-} \varphi(x)$
Z $\neg(1) : \beta < +\infty$, $\neg(2) : \varphi$ je na okolí β^- omez. Ozn. dále:

$$\pi = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (\alpha, \beta) \,|\, x_n \overset{n \to \infty}{\to} \beta^-\}$$
$$P = \inf\{\liminf_{n \to \infty} \varphi(x_n) \,|\, \{x_n\} \in \pi\}$$
$$Q = \sup\{\limsup_{n \to \infty} \varphi(x_n) \,|\, \{x_n\} \in \pi\}$$

Snadno se pomocí Heineho ujistíme, že $P < Q$ a z omezenosti φ na okolí β plyne $-\infty < P < Q < +\infty$. Dále si promyslíme násl. kroky:

1) <u>Hodnoty $\varphi(x)$ jsou poblíž P i Q</u>
Pro $\widetilde{\varepsilon} > 0$:
$(\exists\{\widetilde{x_n}\}, \{\widetilde{\widetilde{x_n}}\} \in \pi)(\liminf \varphi(\widetilde{x_n} \in [P, P + \widetilde{\varepsilon}),$
$\limsup \varphi(\widetilde{\widetilde{x_n}}) \in (Q - \widetilde{\varepsilon}, Q]) \overset{\text{def}}{\Rightarrow} (\exists n_0)$
$(\forall n > n_0)(\varphi(\widetilde{x_{k_n}}) \in [P, P + \widetilde{\varepsilon}) \wedge \varphi(\widetilde{\widetilde{x_{k_n}}}) \in$
$(Q - \widetilde{\varepsilon}, Q]),$ kde $\widetilde{x_{k_n}} \to \beta^-, \widetilde{\widetilde{x_{k_n}}} \to \beta^-$



tím fce $\varphi(x)$ nabývá i všech hodnot mezi $P + \widetilde{\varepsilon}$ a $Q - \widetilde{\varepsilon}$

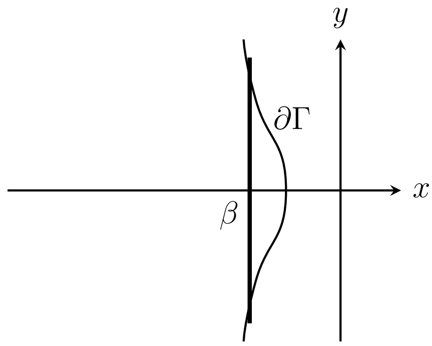
2) Všechny body z úsečky $\{\beta\} \times [P,Q]$ jsou pro graf φ hromadné

tzn. $(\forall y_0 \in [P,Q])([\beta; y_0]$ je hromadný bod$) : y_0 \in [P,Q]$:

- $y_0 = P, Q$ viz (1)
- $y_0 \in (P,Q) \Rightarrow$ zvolme $\widetilde{\varepsilon} : P + \widetilde{\varepsilon} < y_0 < Q - \widetilde{\varepsilon}$

Pak pro dvojici $[\widetilde{x_{k_n}}; \underset{<y_0}{\varphi(\widetilde{x_{k_n}})}]$, $[\widetilde{\widetilde{x_{k_n}}}; \underset{>y_0}{\varphi(\widetilde{\widetilde{x_{k_n}}})}]$ $\exists\, \widehat{x}_n$ tak, že $\varphi(\widehat{x}_n) = y_0 \wedge \widehat{x}_n \to \beta^-$

$\Rightarrow [\widehat{x}_n, \varphi(\widehat{x}_n)] \to [\beta, y_0]$



3) Úsečka U $= \{\beta\} \times [P,Q]$ neleží celá v Γ

Γ je def obor. f pro $\begin{array}{l} y' = f(x,y) \;, \\ y(x_0) = y_0 \end{array}$

Γ je oblast, $[x_0, y_0] \in \Gamma$. Dále dle (2)

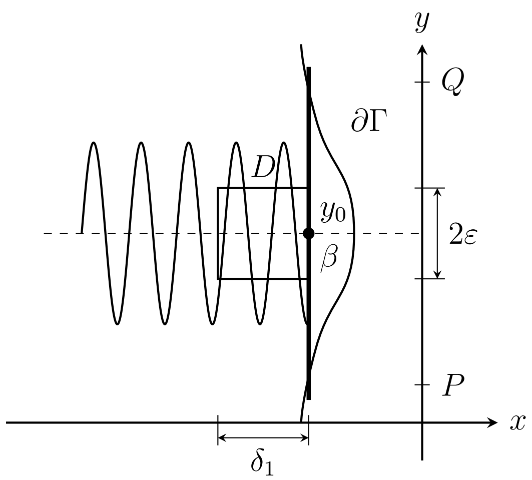
$\rho([x, \varphi(x)]\,|\,U) \overset{x\to\beta^-}{\to} 0$. Z $\neg(3)$ ale platí

$\neg(\lim\limits_{x\to\beta^-} \rho([x,\varphi(x)]\,|\,\partial\Gamma) = 0) \Rightarrow U \not\subset \partial\Gamma \Rightarrow$

$(\exists y_0 \in [P,Q])([\beta, y_0] \notin \partial\Gamma) \Rightarrow [\beta, y_0] \in \Gamma$

4) Konstrukce $D \subset \Gamma$ a spor

Dle (3): $(\exists y_0 \in [P,Q])(\exists \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(D \equiv [\beta - \delta_1, \beta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset \Gamma)$. $f \in C(\Gamma)$, D kompakt. $\Rightarrow$ $(\exists M > 0)(\forall [x,y] \in D)(|f(x,y)| \leq M)$. Dle (1), (2): $(\exists \{\overline{x}_n\}, \{\overline{\overline{x}}_n\} \in \pi)(\exists n_1)(\forall n > \max\{n_0, n_1\})(\varphi(\overline{x}_n) = y_0 - \varepsilon, \varphi(\overline{\overline{x}}_n) = y_0 + \varepsilon, \overline{x}_n \overline{\overline{x}}_n \geq \beta - \delta_1)$ Pak když pro dané $\varepsilon > 0$ (z konstrukce D) zvolíme $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\}$, bude platit $|\underbrace{\varphi(\overline{\overline{x}}_n) - \varphi(\overline{x}_n)}_{2\varepsilon}| \overset{L}{=} |\varphi'(\xi_n)||\overline{x}_n - \overline{\overline{x}}_n| = \underbrace{|f(\xi_n, \varphi(\xi_n))|}_{\leq M}|\underbrace{\overline{x}_n - \overline{\overline{x}}_n}_{\leq\delta}|$, kde $\xi_n \in |\overline{x}_n, \overline{\overline{x}}_n|$ a využíváme faktu, že φ řeší $\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_o \end{array}$ tj. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$



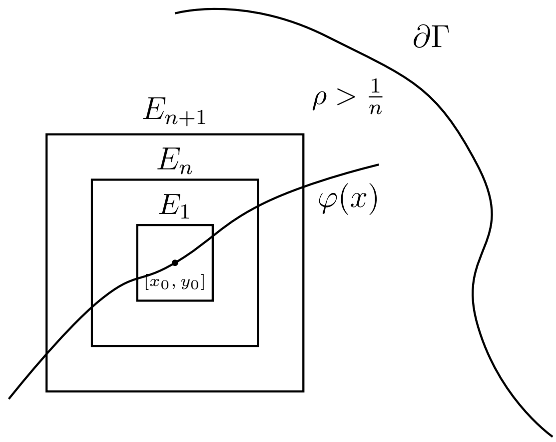
tj. $2\varepsilon \leq M\delta \leq M\frac{\varepsilon}{2M} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ spor. $\rightsquigarrow \exists \lim\limits_{x\to\beta^-} \varphi(x) = L \in \mathbb{R}$

Víme tedy za jakých okolností je řešení neprodloužitelné, zbývá se jen ověřít, zda-li takové řešení existuje.

V (Existence neprodloužítelného řešení):

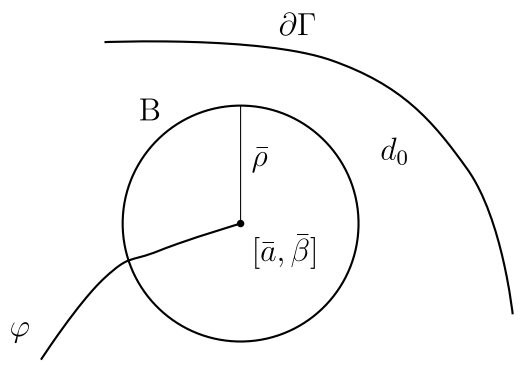
Nť $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ je oblast, $f \in C(\Gamma)$, $[x_0, y_0] \in \Gamma$.
Potom existuje doprava i doleva neprodloužitelné řešení úlohy (3)

DK: proces prodloužení je dán opakovaným použitím Peanovy věty. Ozn.
$\forall n \in \mathbb{N} : E_n \coloneqq \{\{x, y\} \in \Gamma \,|\, |x - x_0| < n \wedge |y - y_0| < n,\ \rho([x, y] \,|\, \partial\Gamma) > \frac{1}{n}\}$
Potom $\overline{E_n} \subset \Gamma$ je kompakt a platí $\overline{E_n} \subset E_{n+1}$. Nť dále φ řeší (3) a je prodlouž. dle Peanovy v. Víme, že $[x, \varphi(x)] \in E_n$, pokud $|x - x_0| < n \wedge |\varphi(x) - y_0| < n$, $\rho([x, \varphi(x)] \,|\, \partial\Gamma) > \frac{1}{n}$
Předpokládejme, že $(\exists \tilde{n} \in \mathbb{N})([x, \varphi(x)] \in E_{\tilde{n}}, \varphi(x)$ je neprodlouž.),
z kritérií neprodlouž. dále platí $\neg(|x - x_0| < \hat{n})$, $\neg(|\varphi(x) - y_0| < \hat{n})$,
$\neg(\rho([x, \varphi(x) \,|\, \partial\Gamma]) < \frac{1}{\hat{n}}) \rightsquigarrow \varphi(x)$ unikne z každé mn. E_n
postupně:
pro E_1 : $\exists[a_0, \varphi(a_0)] \notin \overline{E_1} \wedge (\exists n_1 > 1)([a_0, \varphi(a_0)] \in E_{n_1} \subset \Gamma)$
pro E_{n_1} : $\exists[a_1, \varphi(a_1)] \notin \overline{E_2} \wedge (\exists n_2 > n_1)([a_1, \varphi(a_1)] \in E_{n_2} \subset \Gamma)$
$\vdots$
pro E_{n_k} : $\exists[a_k, \varphi(a_k)] \notin \overline{E_k} \wedge (\exists n_{k+1} > n_k)([a_k, \varphi(a_k)] \in E_{n_{k+1}} \subset \Gamma)$



Vzniká posl. $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, která je rost. $(a_{k+1} > a_k) \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} a_k \equiv \overline{a} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ a φ řeší (3) na $[x_0, \overline{a})$. Sporem ukážeme, že je neprodlouž. doprava.

Nť φ není prodlouž. doprava $\Rightarrow$ platí negace krit. pr. $\neg 1 \wedge \neg 2 \wedge \neg 3 \overset{(*)\ \text{lemma}}{\Longrightarrow}$ $\exists \lim\limits_{x \to \overline{a}} \varphi(x) = \overline{\beta} \in \mathbb{R}$.
Dále plyne z $\neg 1 : \overline{a} < +\infty$, z $\neg 3 : (\lim\limits_{x \to a^-} \rho([x, \varphi(x)] \,|\, \partial\Gamma) > 0)$ a tedy
$(\exists \overline{\rho} > 0)(B \equiv \overline{B([\overline{a}, \overline{\beta}], \overline{\rho})} \subset \Gamma)$ a $(\exists d_0 > 0)(\forall [x,y] \in B)(\rho([x,y] \,|\, \partial\Gamma) \geq d_0)$



$$\left.\begin{array}{l} [a_k, \varphi(a_k)] \overset{k\to\infty}{\to} [\overline{a}, \overline{\beta}] \Longrightarrow (\exists k_0)(\forall k > k_0)([a_k, \varphi(a_k)] \in B) \\ \overline{E_k} \subset E_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad (\exists k_1)(\forall k > k_1)(\frac{1}{n_k} < d_0, \text{ tj. } B \subset E_{n_k}) \end{array}\right\} \text{ ozn. } k_2 = \max\{k_0, k_1\}$$

Pak $\forall k > k_2 : (d_0 > \frac{1}{n_k}) \wedge (|x_0 - \overline{a}| + \overline{\rho} + |y_0 - \overline{\beta}| < n_k)$
Nakonec:
a) $|a_k - x_0| \overset{\Delta}{\leq} |a_k - \overline{a}| + |\overline{a} - x_0| \leq \overline{\rho} + |\overline{a} - x_0| \leq |x_0 - \overline{a}| + \overline{\rho} + |y_0 - \overline{\beta}| < n_k$
b) $|\varphi(a_k) - y_0| \overset{\Delta}{\leq} |\varphi(a_k) - \overline{\beta}| + |\overline{\beta} - y_0| \leq \overline{\rho} + |\overline{\beta} - y_0| \leq |x_0 - \overline{a}| + \overline{\rho} + |y_0 - \overline{\beta}| < n_k$
c) $\rho([a_k, \varphi(a_k)] \,|\, \partial\Gamma) \geq d_0 > \frac{1}{n_k}$
$\Longleftrightarrow \quad (\forall k > k_2)([a_k, \varphi(a_k)] \in E_{n_k})$ spor.

pozn. : Nť f na (α, β) řeší $\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), x \in (\alpha, \beta)$
$f \in C(\Gamma) \Rightarrow \varphi'(x) \exists \Rightarrow \varphi \in C(\alpha, \beta) \Rightarrow f(x, \varphi(x)) \in C(\alpha, \beta)$
$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \in C(\alpha, \beta) \Rightarrow \varphi \in C^1(\alpha, \beta)$

V (Vyšší regularita řešení)

Nť platí předpoklady Peanovy větz a nť $f \in C^{(p)}(\Gamma)$ pro $p \in \mathbb{N}_0$
Potom řešení φ na (α, β) má vyšší regularitu tj. $\varphi \in C^{(p+1)}(\alpha, \beta)$
DK: pomocí neúplné indukce: $f \in C^0(\Gamma) \overset{\text{pozn.}}{\Rightarrow} \varphi \in C^1(\alpha, \beta)$
Nť platí IP $f \in C^k(\Gamma) \Rightarrow \varphi \in C^{k+1}(\alpha, \beta)$, $\forall k < p$. Pak $f \in C^{k+1}(\Gamma) \Rightarrow f(x, \varphi(x)) \in C^{k+1}(\alpha, \beta \Rightarrow \varphi'(x)) = f(x, \varphi(x)) \in C^{k+1}(\alpha, \beta) \Rightarrow \varphi \in C^{k+2}(\alpha, \beta)$. Pro $k > p$ už nelze provést.

V (O spojité závislosti na datech):

Nť $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $[z_0, y_0] \in \Gamma$, $M, L > 0$ pevné,
$\mathcal{F} = \{f \in C(\Gamma) \,|\, \forall [x,y],[x,\tilde{y}] \in \Gamma, |f(x,y)| \leq M, |f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|\}$
Nť $\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}$ řeší $\varphi = \varphi(x)$ na $[\bar{a}, \bar{b}]$ a $\begin{array}{l} y' = \bar{f}(x,y) \\ y(\bar{x_0}) = \bar{y_0} \end{array}$ řeší $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x)$ na $[\bar{a}, \bar{b}]$

pro $f, \bar{f} \in \mathcal{F}$.

Potom platí: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall [\bar{x_0}, \bar{y_0}] \in \Gamma, |\bar{x_0} - x_0| < \delta, |\bar{y_0} - y_0| < \delta)$
$(\forall \bar{f} \in \mathcal{F}, \forall [x,y] \in \Gamma)(|f(x,y) - \bar{f}(x,y)| < \delta)(\forall x \in [\bar{a}, \bar{b}])(|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| < \varepsilon)$

pozn. : Spoj. závislost na datech pro (3): $\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}$

Předp. : $[x_0, y_0] \in \Gamma, f$ jsou data, kolem níchž spojitost zkoumáme.
Nť (α_0, β_0) je def. obor neprodlouž. řešení $\varphi = \varphi(x)$ pro úlohu (3) s daty $[x_0, y_0]$ a $f \in \mathcal{F}$. Pro změněná data $[\bar{x_0}, \bar{y_0}], \bar{f} \in \mathcal{F}$ uvažujeme interval $[\bar{a}, \bar{b}] \subset [\alpha_0, \beta_0]$ pro řešení $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x)$ úlohy $(\bar{3})$: $\begin{array}{l} y' = \bar{f}(x,y) \\ y(\bar{x_0}) = \bar{y_0} \end{array}$

DK:
Krok 1: **lemma:** $\varphi = \varphi(x) \iff \varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))\,\mathrm{d}\hat{x}$ (anal. pro $(\bar{3})$)

dk: $(\Rightarrow)$: dosadíme do (3):

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{array}\right| \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \Rightarrow \varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{=y_0} = \int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))\,\mathrm{d}x$$

$(\Leftarrow)$: $\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))\,\mathrm{d}\hat{x} \Rightarrow \varphi(x_0) = y_0$,
derivováním: $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Krok 2: odhad rozdílu $\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)$

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))\,\mathrm{d}\hat{x}$$

$$\bar{\varphi}(x) = y_0 + \int\limits_{\bar{x_0}}^{x} \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))\,\mathrm{d}\hat{x}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) - \underbrace{\bar{\varphi}(x)}_{\mp f(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))} = y_0 - \bar{y_0} + \int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))\,\mathrm{d}\hat{x} - \int\limits_{\bar{x_0}}^{x} \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))\,\mathrm{d}\hat{x} = y_0 - \bar{y_0} + \int\limits_{x_0}^{x} (f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x})))\,\mathrm{d}\hat{x} + \int\limits_{x_0}^{\bar{x_0}} \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))\,\mathrm{d}\hat{x} = y - \bar{y_0} + \int\limits_{x_0}^{x} (f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - f(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x})))\,\mathrm{d}\hat{x} + \int\limits_{x_0}^{x} (f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x})))\,\mathrm{d}\hat{x} + \int\limits_{x_0}^{\bar{x_0}} \bar{f}(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))\,\mathrm{d}\hat{x}$$

S požadavky: $|y_0 - \bar{y_0}| < \delta, |x_0 - x| < \delta, f \in \mathcal{F}$:
$|f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - f(\hat{x}, \bar{\varphi}(\hat{x}))| \leq L|\varphi(\hat{x}) - \bar{\varphi}(\hat{x})| \wedge (\forall [x, y] \in \Gamma)(|f(x, y) - \bar{f}(x, y)| < \delta)$.

Tedy $|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| \leq \delta + |\int\limits_{x_0}^{x} L|\varphi(\hat{x}) - \bar{\varphi}(\hat{x})| \,\mathrm{d}\hat{x}| + |\int\limits_{x_0}^{x} \delta \,\mathrm{d}\hat{x}| + |\int\limits_{x_0}^{\bar{x_0}} M \,\mathrm{d}\hat{x}| =$
$\delta + |\int\limits_{x_0}^{x} L|\varphi(\hat{x}) - \bar{\varphi}(\hat{x})| \,\mathrm{d}\hat{x}| + \underbrace{|x - x_0|}_{\leq \bar{b} - \bar{a}} \delta + |\bar{x_0} - x_0| M \leq \delta(1 + \bar{b} - \bar{a} + M) +$
$|\int\limits_{x_0}^{x} L|\varphi(\hat{x}) - \bar{\varphi}(\hat{x})| \,\mathrm{d}\hat{x}|$, kde necháváme abs. hodnoty vně int., protože z Peana může být $x \geq x_0$ nebo $x < x_0$. Na zbytek důkazu využijeme obecné lemma.

Lemma (Grönwell):

Nť $u : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}_0^+$ je spoj., $\alpha, \gamma \geq 0, \beta > 0$ a $u(x) \leq \alpha + \int\limits_{x_0}^{x} (\beta u(s) + \gamma) \,\mathrm{d}s$, $x \in [x_0, x_1]$. Pak platí $\forall x \in [x_0, x_1] : u(x) \leq \alpha e^{\beta(x - x_0)} + \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta(x - x_0)} - 1)$

DK: ozn. $v(x) \equiv \alpha + \int\limits_{x_0}^{x} (\beta u(s) + \gamma) \,\mathrm{d}s$, kde $u(x) \leq v(x), v'(x) = \beta u(x) + \gamma \leq$
$\beta v(x) + \gamma \Rightarrow v'(x) - \beta v(x) \leq \gamma \ / \cdot e^{-\beta(x - x_0)}$

$\underbrace{v'(x)e^{-\beta(x - x_0)} - \beta v(x) e^{-\beta(x - x_0)}}_{= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v(x)) e^{-\beta(x - x_0)}} \leq \gamma e^{-\beta(x - x_0)} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v(x) e^{-\beta(x - x_0)}) \leq \gamma e^{-\beta(x - x_0)} \ / \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{d}\hat{x}$
$v(x) e^{-\beta(x - x_0)} - v(x_0) \leq \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta(x - x_0)}) \ / \cdot e^{\beta(x - x_0)}$
$\Rightarrow u(x) \leq v(x) \leq v(x_0) e^{\beta(x - x_0)} + \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta(x - x_0)} - 1)$

V našem případě je $u(x) = |\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)|$, $\alpha = \delta(1 + \bar{b} - \bar{a} + M)$, $\beta = L$, $\gamma = 0$, pak (zvlášť pro $x \geq x_0$ a $x < x_0$)
$\Rightarrow |\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| \leq \delta(1 + \bar{b} - \bar{a} + M) e^{\beta |x - x_0|} \overset{|x - x_0| \leq \bar{b} - \bar{a}}{\leq} \delta(1 + \bar{b} - \bar{a} + M) e^{\beta(\bar{b} - \bar{a})}$
Pak pro zadané $\varepsilon > 0$, určíme $\delta \coloneqq (1 + \bar{b} - \bar{a} + M)^{-1} e^{-\beta(\bar{b} - \bar{a})} \varepsilon$, a pro
$|x_0 - \bar{x_0}| < \delta, |y_0 - \bar{y_0}| < \delta, |f(x, y) / \bar{f}(x, y)| < \delta, [x, y] \in \Gamma \Rightarrow |\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| < \varepsilon$,
$x \in [\bar{a}, \bar{b}]$

DEF (Soustava ODR 1. řádu)

Nť $F^k : \mathbb{R}^{1+n+n} \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ je obyč. dif. výraz

Pak $F'(x, y^1, \dots, y^n, \frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x}) = 0$

$\vdots$ (4)

$F^n(x, y^1, \dots, y^n, \frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x}) = 0$

se nazývá obyč. dif. rovnice 1. řádu pro neznámou vekt fci $y = [y^1, \dots, y^n]$

Soust. $\frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}x} = f^1(x, y^1, \dots, y^n)$

$\vdots$

$\frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x} = f^n(x, y^1, \dots, y^n)$

se nazývá ODR 1. řádu v normálním tvaru, s vekt. zápisem $y' = f(x, y)$

pozn. : Lipschitzkovskost pro $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ vůči vektoru y: pro $\Gamma \subset \mathbb{R}^{1+n}$ oblast a $[x_0, y_0] \in \Gamma (\exists H_{[x_0,y_0]} \subset \Gamma$ okolí$)(\exists L > 0)(|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|)$, kde $|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f^i(x, y^1, \dots y^n) - f^i(x, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $|y - \bar{y}| = \left(\sum_{i=1}^{n} |y^i - \bar{y}^i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

tvrzení: Pokud $\Gamma \subset \mathbb{R}^{1+n}$ je oblast, $f : \Gamma \to \mathbb{R}^m$, $(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{n})(\frac{\partial f^i}{\partial y^j} \in C(\Gamma))$, pak $(\forall [x_0, y_0] \in \Gamma)(\exists \rho_0 > 0)(f$ je lipschitzkovské vůči y na $\overline{B([x_0, y_0], \rho_0)})$

dk: pro $i \in \hat{n}$: ozn. $g^i(t) = f^i(x, y + t(\bar{y} - y))$, $t \in [0, 1] \Rightarrow$

$|g^i(1) - g^i(0)| = |f^i(x, \bar{y}) - f^i(x, y)| = \{g^i \in C^1([0, 1])\} = (g^i)'(\xi^i)(1 - 0)$

$$= |\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f^i}{\partial y^j}(x, y + \xi^i(\bar{y} - y))}_{\leq L^i} \cdot (\bar{y}^j - y^j)| \leq L^i \sum_{j=1}^{n} |\bar{y}^j - y^j| \overset{\Delta}{\leq} nL^i \left(\sum_{k=1}^{n} |\bar{y}^k - y^k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$= nL^i|\bar{y} - y|$. Pak $|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f^i(x, y) - f^i(x, \bar{y})| \right)^{\frac{1}{2}} \leq n|y - \bar{y}|$

$\left(\sum_{i-1}^{n} (L^i)^2 \right) \overset{Li \leq \tilde{L}}{\leq} n^{\frac{3}{2}} \tilde{L} |y - \bar{y}|$

V (Picardova):

Nť $\Gamma \subset \mathbb{R}^{1+n}$ oblast, $n \in \mathbb{N}$ $f \in C(\Gamma,)$ $\frac{\partial f^i}{\partial y^j} \in C(\Gamma)$, $i, j = 1, \dots, n$, $[x_0, y_0] \in \Gamma$
Pak řeš. úlohy (5) $\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}$ ozn. $\varphi = \varphi(x)$ jednozn. $\exists$ na int. $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$

DK: Už víme: $\varphi = \varphi(x)$ řeší (5) $\iff$ $\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))\,\mathrm{d}\hat{x}$ $(*)$

$(*)$ motivuje návrh *Picardovy iterační posl.*:

$$\varphi_0(x) = y_0 \text{ na } (x_0 - a_0, x_0 + a_0)$$
$$\varphi_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, \varphi_0(\hat{x}))\,\mathrm{d}x$$
$$\vdots$$
$$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, \varphi_k(\hat{x}))\,\mathrm{d}x$$

Tím vzniká fční posl. $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ na $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$, kde $\varphi_k = C^{(1)}((x_0 - a_0, x_0 + a_0))$

lemma: Posl. $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ na $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$ konverguje stejnoměrně
dk: chceme BC, tzn.
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall k \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in (x_0 - a_0, x_0 + a_0))(|\varphi_{k+p}(x) - \varphi_k(x)| < \varepsilon)$

$$|\underbrace{\varphi_{k+p}(x) - \varphi_k(x)}_{\mp\varphi_{k+l},\, l=1,\dots,p-1}| \overset{\Delta}{\leq} \sum_{l=0}^{p-1} |\varphi_{k+l+1}(x) - \varphi_{k+l}(x)|$$

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = |\cancel{y_0} + \int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, \underbrace{\varphi_0(\hat{x})}_{=y_0})\,\mathrm{d}x - \cancel{y_0}| = |\int\limits_{x_0}^{x} f(\hat{x}, y_0)\,\mathrm{d}\hat{x}| =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\int\limits_{x_0}^{x} f^i(\hat{x}, y_0)\,\mathrm{d}\hat{x}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\int\limits_{x_0}^{x} f^i(\hat{x}, y_0)\,\mathrm{d}\hat{x}|^2 \leq |\int\limits_{x_0}^{x} |f^i(\hat{x}, y_0)|\,\mathrm{d}\hat{x}|^2 \leq |\int\limits_{x_0}^{x} |f(\hat{x}, y_0)|\,\mathrm{d}\hat{x}|^2\right\}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\int\limits_{x_0}^{x} |f(\hat{x}, y_0)|\,\mathrm{d}\hat{x}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}|\int\limits_{x_0}^{x} |f(\hat{x}, y_0)|\,\mathrm{d}\hat{x}| \quad \text{ozn. } (*)$$