ANA4 cv.

Tenhle dokument napsal DFK

Podpis: ______________________

# Obsah

# 9 Inverzní a implicitní funkce

### Motivace

Aplikace vět o inverzní a implicitní funkci

### Aparát

**V: (O inverzní fci)**
Nť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$
Nť $\det \mathrm{D}f(a) \neq 0$ a $f \in C^1(\Omega)$.
Potom $\exists\, H_a$, 1. $f|_{H_a}$ prostá
2. $f(H_a)$ otevřená
3. $\exists f^{-1} \in C^1(f(H_a))$, $\det \mathrm{D}f(x) \neq 0, \forall x \in H_a$
a plati $\mathrm{D}f^{-1}(f(x)) = (\,\mathrm{d}f(x))^{-1}$

**V: (O implicitní fci)**
Nť $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n, \Omega_m \subset \mathbb{R}^m$,
Nť $F : \Omega_n \times \Omega_m \to \mathbb{R}^m, F \in C^1(\Omega_n \times \Omega_m)$
Nť $(a, b) \in \Omega_n \times \Omega_m$, $F(a, b) = 0$, $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$
Potom: 1. $\exists H_a \subset \Omega_n$, $H_b \subset \Omega_m$ a $\exists! f : H_a \to H_b$ tr $C^1(H_a)$ splň.
$f(a) = b$ a $(\forall x \in H_a)(F(x, f(x)) = 0)$
2. Platí $(\forall x \in H_a)(\det \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0)$ a
$\mathrm{D}f(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$

### Příklady

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix},$
a) zjistěte, kdy je $f$ lok. prostá
b) je $f$ globálně prostá na $\mathbb{R}^2_+$? Nalezněte $f^{-1}$

Mějme rci $x^2 = y^2$ $(*)$
a) Kolik fcí $y = y(x)$ splň. $(*)$
b) Kolik spoj. fcí splň. $(*)$
c) Kolik dif. fcí splň $(*)$
d) Kolik spoj. fcí na $(1 - \delta, 1 + \delta)$ splň. $(*) \wedge y(1) = 1$

Pro $x + y > 1$, $z > 0$ rozhodněte zda rce $x + y + z = e^z$
zadává (implicitně) fci $z = z(x, y)$

Určuje soustava $\begin{cases} F_1 : x + y^2 + u^3 - u - v = 0 \equiv F_1(x, y; u, v) \\ F_2 : x^2 - 3y + u - 2v + 4 = 0 \equiv F_2(x, y; u, v) \end{cases}$

dvojici fcí na okolí $(0, 1)$ $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$

Nť $\varepsilon \in (0, 1)$ a $y - \varepsilon \sin(y) = x \quad (*)$
Určete $y', y''$ a lok. extrémz fce $y = y(x)$ zadané implicitně rcí $(*)$

Nalezněte lok. extr. fce $z = z(x, y)$ zadané rcí $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, kde $a > 0$

Najděte extrémy fce $z = z(x, y)$ implicitně definované vzt.
$F(x, y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 0$

Určete lok. extrémy fce $z = z(x, y)$ zadané rcí
$F(x, y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$

# 10 Vázané extrémy fcí více proměnných

### Motivace

Co k tomu říct?

### Aparát

Hledáme lok. extr. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na množině přípustných řešení
$M = \{x \in \Omega \,|\, g(x) = 0\},\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m < n.$

Řekneme, že $f$ má v $a \in \Omega$ lok. max/min vzhl. k M $\Leftrightarrow (\exists H_a)(\forall x \in H_a \cap M)(f(a) \geq f(x))/(f(a) \leq f(x))$

**DEF: (Lagr. fce)**
Nť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lagr. fce je $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ :
$L(x, \lambda) \coloneqq f(x) - \lambda g(x) = f(x) - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$

**V: (Nutná podm. váz. extr.)**
Nť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tř. $C^1$.
Nť $f$ má v bodě $a \in \Omega$ lok. extr. vzhl. k $M = \{x \in \Omega \,|\, g(x) = 0\}$
Nť $h(Dg(a)) = m < n$
Potom $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : \nabla_x L(a, \lambda) \equiv \nabla f(a) - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \nabla g_j(a) = 0$

**DEF: (Definitnost vzhl. k množině)**
Nť $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T \in \mathbb{R}^{n,m}$, pak $\mathbb{A}$ nazvu:
PD vzhl. k P $\Leftrightarrow (\forall x \in P|\{0\})(x^T \mathbb{A} x > 0)$
ND vzhl. k P $\Leftrightarrow (\forall x \in P|\{0\})(x^T \mathbb{A} x < 0)$
PSD vzhl. k P $\Leftrightarrow (\forall x \in P)(x^T \mathbb{A} x \geq 0) \wedge (\exists x_0 \in P|0)(x_o^T \mathbb{A} x_0 = 0)$
NSD vzhl. k P $\Leftrightarrow (\forall x \in P)(x^T \mathbb{A} x \leq 0) \wedge (\exists x_0 \in P|\{0\})(x_o^T \mathbb{A} x_0 = 0)$
IND vzhl. k P $\Leftrightarrow (\exists x, y \in P|\{0\})(x^T \mathbb{A} x > 0)(y^T \mathbb{A} y < 0)$

**V: (Post. podm. vázaního extr.)**
Nť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tř. $C^2$ na $\Omega$.
Ozn. $M = \{x \in \Omega \,|\, g(x) = 0\}$, $\exists (a, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$, tak, že $\nabla_x L(a, \lambda) = 0$. Potom:
1) $\nabla_x^2 L(a, \lambda)$ PD vzhl. k $T_a(M) \Rightarrow f$ má v $a$ ostr. lok. min. vzhl k M
1) $\nabla_x^2 L(a, \lambda)$ ND vzhl. k $T_a(M) \Rightarrow f$ má v $a$ ostr. lok. max. vzhl k M

<u>**pozn.**</u> **:** $T_a(M) = \bigcap\limits_{j=1}^{m} (\nabla g_j(a)) \equiv \ker Dg(a) \subset \mathbb{R}^n$

**V: Jensonova nerovnost**

**V: Hölderova nerovnost**

# 10 VÁZANÉ EXTRÉMY FCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

## Příklady

Nalezněte vázané extrémy fce:

$f(x, y) = xy$ vzhledem k mn. daná vazbou $x + y = 1$

$f(x, y, z) = xyz$ s vazb. $g_1 = x + y + z = 0$
$\qquad g_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

$f(x, y, z) = xy + yz$ s vazb. $x^2 + y^2 = 2$
$\qquad y + z = 2$

$u = u(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p,\ p > 1$ na $M = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a\},\ a > 0$

$u(x_1, \dots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},\ \alpha_i > 0$ vzhl. k $M = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a\}$

Nalezněte globální extrémy fce:

$u(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ na množině $M = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$

$u(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

$u(x, y, z) = x + y + z$ na $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

Do úseče eliptického paraboloidu $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b},\ z \overset{?}{<} c$ vepište kvádr max. objemu

# 11 Záměna proměnných

### Motivace

zatím nevím

### Aparát

Hledáme transformační fci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
jako bijekci mezi otevřenými množinami $\Omega \xleftrightarrow{f} f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n,\ f, f^{-1} \in C^1$

**Záměna proměnných v ODR:**
$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ODR, kde $y = y(x),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$

$$\underset{\text{staré proměnné}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \xleftrightarrow{\Psi} \underset{\text{nové proměnné}}{\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}}$$

**A) Záměna nezávislých proměnných $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{t}$**
**a) "staré" prom. pomocí "nových":** $x = \varphi(t), \quad \varphi \in C^{(n)}$ a $\dot{\varphi} \neq 0$
$y = u$

<u>úkol</u>: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \rightsquigarrow \widetilde{F}(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n)})$
<u>základní rovnost</u>: $y(x) = u(t) \rightsquigarrow y(\varphi(t)) = u(t) \ \ / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\varphi(t)) \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \iff y'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \dot{u}(t) \ \ / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$
$y''(\varphi(t))(\dot{\varphi}(t))^2 + y'(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t) = \ddot{u}(t)$

$\Rightarrow y'(\varphi(t)) = \frac{\dot{u}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$

$\Rightarrow y''(\varphi(t)) = \frac{\ddot{u}(t) - y'(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)}$

**b) "nové" pomocí "starých":** $t = \alpha(x)$ , $\alpha \in C^{(n)},\ \alpha' \neq 0$
$u = y$

$u(t) = y(x) \rightsquigarrow u(\alpha(x)) = y(x) \ \ / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$\Rightarrow \dot{u}\alpha' = y'$
$\Rightarrow \ddot{u}(\alpha')^2 + \dot{u}\alpha'' = y''$

**B) Záměna závislých a nezávislých proměnných: $\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{t})$**
**a) "staré" pomocí "nových":** $x = \varphi(t, u)$ , kde $\varphi, \psi \in C^{(n)}$ regulární
$y = \psi(t, u)$

<u>základní rovnost</u>: $y(x) = \psi(t, u) \rightsquigarrow y(\varphi(t, u)) = \psi(t, u) \ \ / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$y' \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \dot{u} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \dot{u} \rightsquigarrow y' = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \dot{u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \dot{u}}$

**b) "nové" pomocí "starých":** $t = \alpha(x,y)$ , kde $\alpha, \beta \in C^{(n)}$ regulární
$u = \beta(x,y)$

<u>základní rovnost</u>: $u(t) = \beta(x,y) \rightsquigarrow u(\alpha(x,y)) = \beta(x,y) \ / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\dot{u}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}y'\right) = \frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}y' \rightsquigarrow \dot{u} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}y'}{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}y'}$$

**Záměna proměnných v parc. dif. rci**
$F = F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial z}{\partial y^2}, \ldots)$, kde $z = z(x,y)$

**A) Záměna nezávislých proměnných**

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$, a $z(x,y) = w(u,v)$

**a) "staré" prom. podle "nových:** $x = \varphi(u,v)$ , $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ je reg.
$y = \psi(u,v)$

<u>základní rovnost</u>: $z(\varphi(u,v), \psi(u,v)) = w(u,v) \ / \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &: \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} &: \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial v} \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \end{pmatrix}}_{\mathbb{J}^T \text{ reg.}} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix}$$

**b) "nové" pomocí "starých":** $u = \alpha(x,y)$
$v = \beta(x,y)$

<u>základní rovnost</u>: $z(x,y) = w(\alpha(x,y), \beta(x,y)) \ / \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial y}$$

**B) Záměna závislých a nezávislých proměnných** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\Psi}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

**a) "staré" pomocí "nových":** $x = \varphi(u,v,w)$ , kde $z(x,y), w(u,v)$
$y = \psi(u,v,w)$
$z = \xi(u,v,w)$

<u>základní rovnost</u>: $z(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w)) = \xi(u,v,w) \ / \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$

$$\frac{\partial}{\partial u} : \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial\xi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial\xi}{\partial v}$$

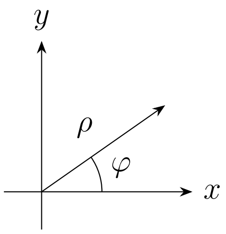
**b) "nové" podle "starých":** $u = \alpha(x,y,z)$
$v = \beta(x,y,z)$
$w = \gamma(x,y,z)$

<u>základní rovnost</u>: $w(\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z)) = \gamma(x,y,z) \ \ / \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial\gamma}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : \frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial\gamma}{\partial y}$$

**Polární souřadnice**




transf. $\phi$ :
$x = \rho\cos\varphi,\ \rho \in (0,\infty)$
$y = \rho\sin\varphi,\ \varphi \in (-\pi,\pi)$

$$\det D\phi : \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\rho & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \neq 0$$

$\phi((0,\infty)\times(-\pi,\pi)) = \mathbb{R}^2|_{P_\pi}$, kde $P_\pi = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 0 \wedge x \le 0\}$

$$\phi^{-1} : \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \arctan^*\left(\tfrac{y}{x}\right) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x},\ x>0, \\ \arctan\frac{y}{x}+\pi,\ x<0, y>0, \\ \arctan\frac{y}{x}-\pi,\ x>0, y<0, \\ \frac{\pi}{2}, \quad x=0, y>0, \\ -\frac{\pi}{2},\ x=0, y>0, \end{cases}$$

transf. v dif. výrazech $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ w \end{pmatrix}$, kde $z = z(x,y), w = w(\rho,\varphi)$

**a) "staré" → "nových":**
<u>základní rovnost</u>: $z(x,y) = z(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) = w(\rho,\varphi)$

$$\frac{\partial}{\partial\rho} : \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi = \frac{\partial w}{\partial\rho}$$
$$\frac{\partial}{\partial\varphi} : \frac{\partial z}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial z}{\partial y}(\rho\cos\varphi) = \frac{\partial w}{\partial\varphi}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial\rho} \\ \frac{\partial w}{\partial\varphi} \end{pmatrix}$$

**b) jak spočítat inverzi?**

$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{\text{adj}} = \frac{1}{\rho} \mathbb{A}^{\text{adj}}$, kde $(\mathbb{A}^{\text{adj}})_{ij} \equiv D_{ji} = (-1)^{i+j} M^{ji} = (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}^{ji}$

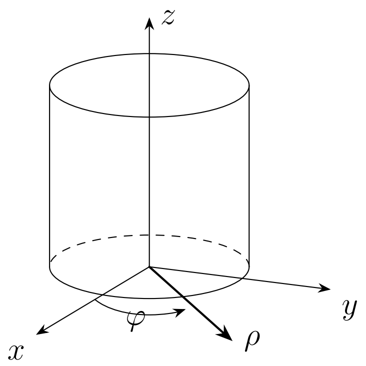
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \rho \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial \rho} \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

**Diferenciální operátory:**

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

**Válcové souřadnice**




transf. $\phi$ :
$x = \rho \cos \varphi,\ \rho \in (0, \infty)$
$y = \rho \sin \varphi,\ \varphi \in (-\pi, \pi)$
$z = \xi,\ \xi \in \mathbb{R}$

$$\det D\phi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \neq 0$$

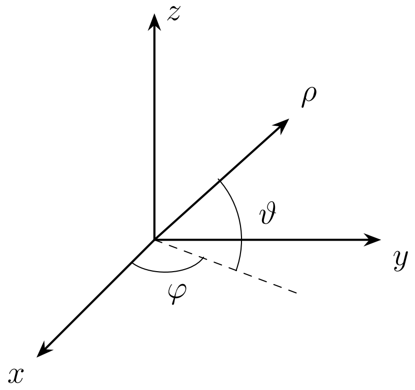
$$\phi((0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{\nvDash}|_{\mathbb{P}_\pi}) \times \mathbb{R}$$

**V dif. výrazech:**

$$\nabla = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

### Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^3$




transf. $\phi$ :
$x = \rho \cos\varphi \cos\vartheta,\ \rho \in (0, \infty)$
$y = \rho \sin\varphi \cos\vartheta,\ \varphi \in (-\pi, \pi)$
$z = \rho \sin\vartheta,\ \vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\phi : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (\mathbb{R}^2|_{P_\pi}) \times \mathbb{R}$

$\phi$ lze chápat jako složení 2 válcových transf. $\phi \equiv \phi_1 \circ \phi_2$

kde $\phi_1 :\ x = r\cos\varphi'$ , $\phi_2 :\ r = \rho\cos\vartheta$
$\quad\ y = r\sin\varphi' \qquad \varphi' = \varphi$
$\quad\ z = \xi \qquad \xi = \rho\sin\vartheta$

$$\phi_1 : \underset{r}{\mathbb{R}^+} \times \underset{\varphi'}{(-\pi, \pi)} \times \underset{\xi}{\mathbb{R}} :\ \phi_1 \begin{pmatrix} r \\ \varphi' \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi' \\ r\sin\varphi' \\ \xi \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 : \underset{\rho}{\mathbb{R}^+} \times \underset{\varphi}{\mathbb{R}} \times \underset{\vartheta}{(-\pi, \pi)} :\ \phi_2 \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \varphi \\ \rho\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$(\phi_1 \circ \phi_2)(\rho, \varphi, \vartheta) = \phi_1(\rho\cos\vartheta, \varphi, \rho\sin\vartheta) = (\rho\cos\vartheta\cos\varphi, \rho\cos\vartheta\sin\varphi, \rho\sin\vartheta) = \phi(\rho, \varphi, \vartheta)$

$\det D\phi = \det D(\phi_1 \circ \phi_2) = \det D\phi_1 \det D\phi_2 = r\rho = \rho^2\cos\vartheta > 0$

### Diferenciální operátory

$\nabla_\phi = \left(\cos\varphi\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\cos\varphi\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{\rho\cos\vartheta}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \sin\varphi\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\sin\varphi\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\rho\cos\vartheta}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)$

$\Delta_\phi = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\rho^2\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

## Zobecnění

## Příklady

### Záměna proměnných v ODR:

#### A) Záměna nezávislých proměnných

Ve výrazu $F(x,y,y'y'') = x^2y'' + xy' + y$, kde $x \in (0,\infty)$ a $y \in C^{(2)}$ proveďte záměnu $x = e^t$

V dif. výrazu $F(x,y,y',y'') = y'' - y'\frac{\varepsilon \sin x}{1-\varepsilon\cos x} - y(1-\varepsilon\cos x)^2$, kde $\varepsilon \in (0,1)$, $x \in \mathbb{R}, y \in C^{(2)}$ proveďte záměnu prom. pomocí tzv. *Keplerovy subst.* $t = x - \varepsilon \sin x$ a vyřešte ODR $f = 0$

#### B) Záměna závislých a nezávislých proměnných:

Vyřeště DR: $(1+x^2)y'' = y'$, kde $x \in \mathbb{R}$, $y \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ pomocí subst.

$$x = \tanh t$$
$$y = \frac{u(t)}{\cosh t}$$

Mějme rovnici $y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$, $x \in \mathbb{R}|[a,b]$, $A \in \mathbb{R}$, $a < b$. Proveďte záměnu prom. pomocí tzv. *Stokesovy subst.*: $u = \frac{y}{x-b}$

$$t = \ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right)$$

### Záměna proměnných v parc. dif. rci

#### A) Záměna nezávislých proměnných

Vyřešte vlnovou rci: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, kde $c \neq 0$ je rychlost šíření vlny pomocí subst. $u = x - ct$

$$v = x + ct$$

Vyřeště rci: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ pomocí transf. $x = u$, $y = uv$, kde $x, y \neq 0$

#### B) Záměna závislých a nezávislých proměnných

V rci: $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, proveďte záměnu prom. pomocí

$$u = y - z$$
$$v = y + z$$
$$w = x$$

Vyřeště PDR $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z,\ x,y,z > 0$ pomocí subst.

$$\Psi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ \ln z - x - y \end{pmatrix}$$

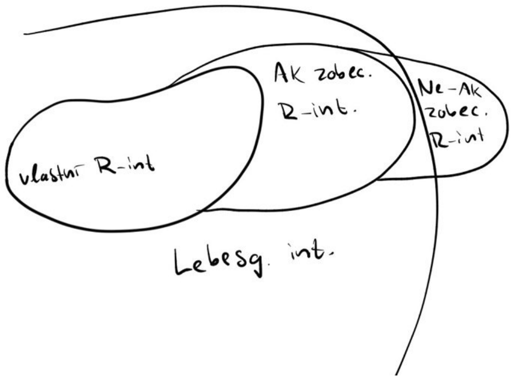
v DR $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ proveďte záměnu pomocí

$$\Psi\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin u \\ \sin v \\ e^w \end{pmatrix}$$

# 12 Lebesgueův integrál

### Motivace

Definice Lebesgueova integrálu a následná aplikace základních vět.




### Aparát

**V:** Nť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má AK zobec. R-int. na $(a, b)$.

Potom $f$ je lebesg. int (L-int) na $(a, b)$ a $\int\limits_a^b f = \int\limits_{(a,b)} f$

**V (Tonelli - Fubini):**

**1) Tonelli:** $f \in \mathcal{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$, pak:
$(\forall x \in X)(f(x, \circ) \in \mathcal{L}_+(Y)) \wedge (\forall y \in Y)(f(\circ, y) \in \mathcal{L}_+(X))$,
$\int f(\circ, y)\,\mathrm{d}\nu(y) \in \mathcal{L}_+(X) \wedge \int f(x, \circ)\,\mathrm{d}\mu(x) \in \mathcal{L}_+(Y)$,
$\int f\,\mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int(\int f(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y))\,\mathrm{d}\mu(x) = \int(\int f(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x))\,\mathrm{d}\nu(y)$

**2) Fubini:** $f \in L(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$, pak:
$(\mu - \text{s.v.} x \in X)(f(x, \circ) \in L(Y)) \wedge (\nu - \text{s.v.} y \in Y)(f(\circ, y) \in L(X))$,
$\int f(\circ, y)\,\mathrm{d}\nu(y) \in L(X) \wedge \int f(x, \circ)\,\mathrm{d}\mu(x) \in L(Y)$,
$\int f\,\mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int(\int f(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y))\,\mathrm{d}\mu(x) = \int(\int f(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x))\,\mathrm{d}\nu(y)$

**V (O substituci):**

Nť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot. a $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ difeomorf.
Nť $f$ lebesg. měř. na $\phi(\Omega)$.
Potom $f \circ \phi$ je také lebesg. měř. na $\Omega$
Pokud navíc $f \in L(\phi(\Omega), m)$, potom
$\int\limits_{\phi(\Omega)} f(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int\limits_{\Omega} (f \circ \phi)(t) |\det D\phi(t)|\,\mathrm{d}m(t)$

**Eulerovy integrály**

$\boldsymbol{B}$ ... Eulerův integrál 1. druhu

$\boldsymbol{\Gamma}$ ... Eulerův integrál 2. druhu

$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\ ,\ x > 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{x-1}} = 1 \Rightarrow$ int. $\boxed{K} \iff \int\limits_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,\boxed{K} \iff x-1 < -1$

$B(u,v) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\ ,\ x,y > 0$

**pozn. :** $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\ , \forall z \in \mathbb{C}$

$B(u,v) = \int\limits_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,\mathrm{d}t\ , \forall u,v \in \mathbb{C},\ \text{Re u, Re v} > 0$

Nám se obzvlášť bude hodit tvar $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \varphi\ \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$, který lze dokázat subst. $t = \sin^2\varphi$

$\mathrm{d}t = 2\sin\varphi\cos\varphi\ \mathrm{d}\varphi$

**V:**

1) $(\forall x > 0)(\Gamma(x+1) = x\Gamma(x))$

2) $(\forall x,y > 0)(B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)})$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\Gamma(n+1) = n!)$

4) $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi})$ ... spec. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

**V (Eulerův vzorec):**

$\forall x \in (0,1),\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},\ \forall x \in \mathbb{C}|_{\mathbb{Z}}$

**V:** $\Gamma \in C^\infty(0,\infty)$, ryze konvexní na $(0,\infty)$ a platí

$\lim\limits_{x\to 0+} \Gamma(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$

**V (Lebesgue):**

Nť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ $\mu-$s.v def. komplex měř. fcí, Nť dále platí:

1) $f_n \to f$ $\mu-$s.v.

2) $(\exists g \in L)(\forall n \in \mathbb{N})(\mu - \text{s.v } x \in X)(|f_n(x)| \le g(x))$

Potom $f \in L$ a $\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu$

**V (O limitě):**
Mějme $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Nť $f : X \times (a, b) \to \mathbb{C}$, $t_0 \in (a, b)$ splň:
i) $(\forall t \in (a, b))(f(\,\circ\,, t)$ měř.)
ii) $(\mu -$ s.v. $x \in X)(\exists \lim\limits_{t \to t_0} f(x, t) \equiv h(x))$
iii) $(\exists g \in L)(\forall t \in (a, b))(\mu -$ s.v.$x \in X)(|f(x, t)| \leq g(x))$
Potom $h \in L$ a $\int h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim\limits_{t \to t_0} \int f(x, t)\,\mathrm{d}\mu(x)$

**V (O derivaci):**
Nť $f : X \times (a.b) \to \mathbb{C}$ splň:
i) $(\forall t \in (a, b))(f(\,\circ\,, t) \in L)$
ii) $(\mu -$ s.v. $x \in X)(f(x,\,\circ\,)$ diferenc. na $(a, b))$
iii) $(\exists g \in L)(\forall t \in (a, b))(\mu -$ s.v. $x \in X)(|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x))$
Potom $F(t) \coloneqq \int f(x, t)\,\mathrm{d}\mu(x)$ je diferenc. na $(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial t}(\,\circ\,, t) \in L$, $\forall t \in (a, b)$ a $\forall t \in (a, b) : F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t), \mathrm{d}\mu(x)$

**pozn. :** Za použití Lagrange, $|f(x, t)| \leq |f(x, t_0)| + |t - t_0||\frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi)| \overset{(iii)}{\leq} |f(x, t_0)| + |t - t_0|g(x) \in L \Leftrightarrow f(x, t_0) \in L$ lze nahradit (i) pro jedno $t_0 \in (a, b)$, čehož budeme hojně využívat.

**Příklady:**

Odvoďte tzv. *Dirichletovu formuli* pro $f \in L((0,a)\times(0,a))$, $a>0$
$\int_0^a \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^a \int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Zameňte pořadí integrace v $I = \int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Zameňte pořadí integrace v $I = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,\ a>0$

Spoč. integrál $I = \int_M y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
kde $M \coloneqq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x\in(0,2\pi a), y\in(0,\varphi(x))\}$,
kde $\phi$ značí oblouk cykloidy parametrizována vztahem
$\phi(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t)),\ t\in(0,2\pi)$

Vypočtěte $I = \int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le a^2\},\ a>0$

V integrálu $I = \int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ proveďte polární transformaci pro:
a) $M \coloneqq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\le a^2\}$
b) $M \coloneqq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\le ax\}$

Spočtěte $I = \int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y)$, kde $M \coloneqq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^4+y^4\le 1\}$

Pro $a,b,h>0,', M = (a,a+h)\times(b,b+h)\subset\mathbb{R}^2$ uvažujme transformaci
$\phi : M \to M' : \begin{array}{l} u = \frac{y^2}{x} \\ v = \sqrt{xy} \end{array}$. Spočtěte $\mu(M')$ a $\frac{\mu(M')}{\mu(M)}$

Dokažte, že $\forall\alpha,\beta>-1$ platí $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha\varphi\cos^\beta\varphi\ \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right)$

Rozhodněte, pro která $m,n\in\mathbb{Z}$ integrál $I_{m,n} = \int_0^\infty \frac{x^m-1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ konverguje a pro tyto hodnoty vypočtěte

Určete plochu S vymezenou nerovnostmi: $\begin{array}{l}(x^2+y^2)\le 2a^2(x^2-y^2)\ ,\ a>0 \\ x^2+y^2\ge a^2\end{array}$

Spočtěte plochu Descartova listu $M : (\frac{x}{a}-\frac{y}{b})^5 \le \frac{x^2y^2}{c^4}, a,b,c,x,y>0$

Spočtěte objem tělesa M: $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) \le \frac{z}{n}\exp\left(\frac{-\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\right)$

Spočtěte objem Vivianiho tělesa (tj. průniku koule a válce),
$M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2\le a^2 \wedge x^2+y^2\le ax\}$

Spočtěte objem tělesa $M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2\le z \wedge x+y\ge z\}$

Spočtěte objem n-rozměrné koule $B^n(r) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq r^2\}$
Vypočtěte objem elipsoidu $M = \{x \in R^n \mid x^T A x \leq 1\}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ PD

Vypočtěte objem n-symplexu $M = [x_0, \ldots, x_n]_\gamma = \{\sum\limits_{i=0}^{n} t_i x_i \mid \sum\limits_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0\}$,
kde $(x_0, \ldots, x_1)$ je soubor afinně LNZ vektorů v $\mathbb{R}^n$,
tj. $(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0)$ LN

Spočítejte integrál: $I(a,b) = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x,\ a, b > -1$

$a > 0, n \in \mathbb{N}_0$, spočítejte $I_n(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$

$|a| < 1$, spočítejte $I(a) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spočítejte $I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^\infty \frac{\arctan(\alpha x)\arctan(\beta x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$a \in \mathbb{R} : I(a) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x$

$I(a,b) = \int\limits_0^\infty e^{-ax^2}\cos(bx)\,\mathrm{d}x,\ a > 0, b \in \mathbb{R}$

$a, b > 0 : I(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x$

$I(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$|a| < 1 : I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

# 13 Křivkové a plošné integrály

### Motivace

Definice křivkového integrálu 1. a 2. druhu a aplikace známých vzorečku z fyziky. Věty nemáme dokázané, na to slouží předmět variační počet na varietách.

### Aparát

**DEF(Křivka):**
zobr. $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ spoj.

**DEF(Křivkový integrál 1. druhu):**
Nť $\phi : a, b \to \mathbb{R}^n$ po částech $C^1$ křivka, $f : [\phi] \equiv \phi([a, b]) \to \mathbb{R}$.
Pokud $(f \circ \phi)||\phi'|| \in L(a, b)$, def křivkový int. fce $f$ podél křivky $\phi$ 1. druhu
$\int_\phi f \, \mathrm{d}s := \int\limits_a^b f(\phi(t))||\phi'(t)|| \, \mathrm{d}t$

**DEF(Křivkový integrál 2. druhu):**
Pro $F \equiv (F_1, \ldots, F_n) : [\varphi] \to \mathbb{R}^n$,
pokud $< F(\phi( \circ ))|\phi'( \circ ) > \in L(a, b)$ def křivkový integrál fce F podél křivky $\phi$ 2. druhu
$\int_\phi F \cdot \mathrm{d}s := \int_\phi F_1 \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \mathrm{d}x_n = \int\limits_a^b < F(\phi(t))|\phi'(t) > \, \mathrm{d}t$

## Příklady

Spočtěte $\int_\phi (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\,\mathrm{d}s$, kde $\phi : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
$\int_\phi \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, kde $[\phi] = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = a^2(x^2-y^2), a > 0$
$I = \int_\phi y^2\,\mathrm{d}s$, kde $\phi(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t)), t \in [0, 2\pi]$
Spoč. křivkové integrály 2. druhu $I_i = \int_{\phi_i} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$,
kde $\phi_1$ je úsečka spoj. body $(0,0), (1,1)$
$\phi_2$ je parabola
$\phi_3$ je lomená čára

Spoč. $I = \int_\phi (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, kde $[\phi] = [\phi_1] \cup [\phi_2] \cup [\phi_3]$

Pomocí GV spočítejte $I = \int_\phi (e^x \sin y - \mathrm{p}y)\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - \mathrm{p})\,\mathrm{d}y$, kde $\phi$ je kladně orientovaná půlkružnice se středem $(\frac{a}{2}, 0)$ a poloměrem $\frac{a}{2}$.
Spočtěte $I = \int_\phi \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, kde $\phi$ kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v $(0,0)$

Použitím GV spočítejte plochu elipsy $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 1$
Spočítejte obsah koule o poloměru $\underline{a}$
Spočítejte $I = \int_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\,\mathrm{d}s$, kde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, $a, b, c, > 0$
Spočítejte plochu Vivianiho tělesa, tj povrch tělesa vzniklého průnikem koule a válce: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$
$x^2 + y^2 \leq ax$

Spočítejte $\int_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq R^2, z = 0\}$, $R > 0$ s orientací $n = (0,0,-1)$

$I = \int_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2\}$ s orientací určenou vnější normálou

Spočítejte $I = \int_\phi (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z$, kde $[\phi]$ je šroubovice v $\mathbb{R}^3$, $\phi$ :
$$x = \mathrm{a}\cos t\ ,\ t \in [-\pi, \pi]$$
$$y = \mathrm{a}\sin t$$
$$z = \frac{h}{2\pi} t$$