

ANA4 cv.

Tento dokument je neoficiálním, soukromým studijním materiálem. Text představuje autorskou syntézu, shrnutí a osobní interpretaci témat probíraných na cvičení nadaného laureáta ceny Stanislava Hanzla, neomezeně úspěšného Bc. Jakuba Waclawka v LS 2025/2026. Nejedná se o oficiální výukový materiál ČVUT, o doslovný přepis cvičení, ani o dílo schválené vyučujícím. Všechny ochranné známky, názvy předmětů a případné citované metodiky jsou vlastnictvím příslušných držitelů práv.

Text je poskytován bezúplatně, pro osobní studijní potřeby a bez jakýchkoliv záruk za správnost, úplnost či aktuálnost obsahu. Autor nenese v souladu s § 2950 zákona č. 89/2012 Sb., občanský zákoník, odpovědnost za jakoukoliv újmu (včetně neúspěchu u zkoušek či jiných studijních povinností), která by vznikla v důsledku spoléhání se na informace v tomto textu. Užití materiálů je výhradně na vlastní nebezpečí čtenáře.

Tímto prohlašuji, že jsem tento text vypracoval samostatně na základě vlastních poznámek pořízených v průběhu cvičení.

V Praze dne 15. srpna 2026

Obsah

9 Inverzní a implicitní funkce	1
Motivace	1
Aparát	1
Příklady	2
10 Vázané extrémy fcí více proměnných	3
Motivace	3
Aparát	3
Příklady	6
11 Záměna proměnných	7
Motivace	7
Aparát	7
Příklady	13
12 Lebesgueův integrál	14
Motivace	14
Aparát	14
Příklady:	17
13 Křivkové a plošné integrály	19
Motivace	19
Aparát	19
Příklady	22

9 Inverzní a implicitní funkce

Motivace

Aplikace vět o inverzní a implicitní funkci

Aparát

V: (O inverzní fci)

Nt $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$

Nt $\det Df(a) \neq 0$ a $f \in C^1(\Omega)$.

Potom $\exists H_a$, 1. $f|_{H_a}$ prostá
2. $f(H_a)$ otevřená
3. $\exists f^{-1} \in C^1(f(H_a))$, $\det Df(x) \neq 0, \forall x \in H_a$
a platí $Df^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}$

V: (O implicitní fci)

Nt $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n, \Omega_m \subset \mathbb{R}^m$,

Nt $F : \Omega_n \times \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}^m, F \in C^1(\Omega_n \times \Omega_m)$

Nt $(a, b) \in \Omega_n \times \Omega_m, F(a, b) = 0, \det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$

Potom: 1. $\exists H_a \subset \Omega_n, H_b \subset \Omega_m$ a $\exists! f : H_a \rightarrow H_b$ tr $C^1(H_a)$ splň.
 $f(a) = b$ a $(\forall x \in H_a)(F(x, f(x)) = 0)$
2. Platí $(\forall x \in H_a)(\det \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0)$ a
$$Df(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

9 INVERZNÍ A IMPLICITNÍ FUNKCE

Příklady

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

a) zjistěte, kdy je f lok. prostá

b) je f globálně prostá na $\mathbb{R}_+^2$? Nalezněte f^{-1}

Mějme rcí $x^2 = y^2$ (*)

a) Kolik fcí $y = y(x)$ splň. (*)

b) Kolik spoj. fcí splň. (*)

c) Kolik dif. fcí splň. (*)

d) Kolik spoj. fcí na $(1 - \delta, 1 + \delta)$ splň. $(*) \wedge y(1) = 1$

Pro $x + y > 1, z > 0$ rozhodněte zda rce $x + y + z = e^z$
zadává (implicitně) fcí $z = z(x, y)$

$$\text{Určuje soustava } \begin{cases} F_1 : x + y^2 + u^3 - u - v = 0 \equiv F_1(x, y; u, v) \\ F_2 : x^2 - 3y + u - 2v + 4 = 0 \equiv F_2(x, y; u, v) \end{cases}$$

$$\text{dvojici fcí na okolí } (0, 1) \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Nt' $\varepsilon \in (0, 1)$ a $y - \varepsilon \sin(y) = x$ (*)

Určete y', y'' a lok. extrémz fce $y = y(x)$ zadané implicitně rcí (*)

Nalezněte lok. extr. fce $z = z(x, y)$ zadané rcí $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, kde $a > 0$

Najděte extrémy fce $z = z(x, y)$ implicitně definované vzt.

$$F(x, y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 0$$

Určete lok. extrémy fce $z = z(x, y)$ zadané rcí

$$F(x, y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

10 Vázané extrémů fcí více proměnných

Motivace

Co k tomu říct?

Aparát

Hledáme lok. extr. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na množině přípustných řešení
 $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$.

Řekneme, že f má v $a \in \Omega$ lok. max/min vzhl. k $M \Leftrightarrow (\exists H_a)(\forall x \in H_a \cap M)(f(a) \geq f(x))/(f(a) \leq f(x))$

DEF: (Lagr. fce)

Nt $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lagr. fce je $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$:

$$L(x, \lambda) := f(x) - \lambda g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$$

V: (Nutná podm. váz. extr.)

Nt $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tž. C^1 .

Nt f má v bodě $a \in \Omega$ lok. extr. vzhl. k $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$

Nt $h(Dg(a)) = m < n$

$$\text{Potom } \exists \lambda \in \mathbb{R}^m : \nabla_x L(a, \lambda) \equiv \nabla f(a) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(a) = 0$$

DEF: (Definitnost vzhl. k množině)

Nt $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T \in \mathbb{R}^{n,m}$, pak $\mathbb{A}$ nazvu:

PD vzhl. k $P \Leftrightarrow (\forall x \in P \setminus \{0\})(x^T \mathbb{A} x > 0)$

ND vzhl. k $P \Leftrightarrow (\forall x \in P \setminus \{0\})(x^T \mathbb{A} x < 0)$

PSD vzhl. k $P \Leftrightarrow (\forall x \in P)(x^T \mathbb{A} x \geq 0) \wedge (\exists x_0 \in P \setminus \{0\})(x_0^T \mathbb{A} x_0 = 0)$

NSD vzhl. k $P \Leftrightarrow (\forall x \in P)(x^T \mathbb{A} x \leq 0) \wedge (\exists x_0 \in P \setminus \{0\})(x_0^T \mathbb{A} x_0 = 0)$

IND vzhl. k $P \Leftrightarrow (\exists x, y \in P \setminus \{0\})(x^T \mathbb{A} x > 0)(y^T \mathbb{A} y < 0)$

V: (Post. podm. vázaného extr.)

Nt $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tž. C^2 na Ω .

Ozn. $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$, $\exists (a, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$, tak, že $\nabla_x L(a, \lambda) = 0$.

Potom:

1) $\nabla_x^2 L(a, \lambda)$ PD vzhl. k $T_a(M) \Rightarrow f$ má v a ostr. lok. min. vzhl k M

1) $\nabla_x^2 L(a, \lambda)$ ND vzhl. k $T_a(M) \Rightarrow f$ má v a ostr. lok. max. vzhl k M

pozn. : $T_a(M) = \bigcap_{j=1}^m (\nabla g_j(a))^\perp \equiv \ker Dg(a) \subset \mathbb{R}^n$

10 VÁZANÉ EXTRÉMY FCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Přechod lokálního extrému na globální vzhledem k množině M , zajišťuje konvexnost nebo konkávnost účelové funkce na konvexní M . Řekneme, že mn. M je konvexní $\stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x, y \in M)(\forall t \in [0, 1])(tx + (1-t)y \in M)$.

Pak pro např. konvexní u na M tj. $(\forall x, y \in M)(\forall t \in [0, 1])(u(tx + (1-t)y) \leq tu(x) + (1-t)u(y))$ lze rovnou říct, že lokální minimum na M bude i globální. Pro konkávní u platí opačná nerovnost a maximum.

V: Jensonova nerovnost

Aplikujme předchozí znalosti na př. 10.4.

$$u = u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^p, \quad p > 1 \text{ na } M = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = a\}, \quad a > 0,$$

s řešením: min. v bodě $\vec{a} = (\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n})$

$$\sum_{i=1}^n (tx + (1-t)y)_i = t \sum_{i=1}^n x_i + (1-t) \sum_{i=1}^n y_i = a \in M$$

$$u(tx + (1-t)y) = \sum_{i=1}^n (tx_i + (1-t)y_i)^p < \sum_{i=1}^n tx_i^p + (1-t)y_i^p = tu(x) + (1-t)u(y)$$

$$u(\vec{a}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{n}\right)^p = \frac{a^p}{n^{p-1}} \stackrel{\text{glob. min.}}{\leq} u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^p, \quad \forall x \in M \text{ (kde } a = \sum_{i=1}^n x_i)$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^p}{n^{p-1}} \leq \sum_{i=1}^n x_i^p \quad / \cdot \frac{1}{n} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p$$

Což motivuje znění Jensen. nerovnosti : Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní a $\lambda_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Potom $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$, kde v 10.4 $\lambda_i \equiv \frac{1}{n}$

V: Hölderova nerovnost

Podobně si odvodíme znění pomocí příkladu 10.5.

$$u(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0 \text{ vzhl. k } M = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = a\},$$

s řešením: max v bodě $x_i = \frac{\alpha_i a}{\sum_{j=1}^n \alpha_j}$

Def. $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid \sum_{i=1}^n x_i = a\}$. - na $\overline{M}$ je u spoj. Pak na $\partial M \equiv \overline{M}|_M$ je $u \equiv 0$, neboť alespoň 1 složka x je 0. Mn. M je konvexní, fce u na M konvexní není. Víme ale, že na reálné fce na kompaktu nabývají svého maxima, a že to maximum nutně leží uvnitř M . Dále protože nalezené x_i je jediný bod podezřelý z extrému, bude nutně globální max.

$$u(\vec{a}) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i a}{\sum_{j=1}^n \alpha_j}\right)^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \text{ (kde } a = \sum_{i=1}^n x_i)$$

10 VÁZANÉ EXTRÉMY FCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Uvažujme: $n = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$
 $\alpha_2 = \frac{1}{q}$

$$x_1 := \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^m a_j^p}, \quad a_1, \dots, a_m > 0$$

$$x_2 := \frac{1}{q} \frac{b_i^p}{\sum_{j=1}^m b_j^p}, \quad b_1, \dots, b_m > 0$$

$$\left(\frac{\frac{1}{p} \cdot a}{1}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{\frac{1}{q} \cdot a}{1}\right)^{\frac{1}{q}} \geq x_1^{\frac{1}{p}} \cdot x_2^{\frac{1}{q}}, \text{ kde } a = x_1 + x_2$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} (x_1 + x_2) \geq x_1^{\frac{1}{p}} x_2^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^m a_j^p} + \frac{1}{q} \frac{b_i^p}{\sum_{j=1}^m b_j^p}\right) \geq \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^m a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}} + \frac{b_i}{\left(\sum_{j=1}^m b_j^p\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^m a_j^p} + \frac{1}{q} \frac{b_i^p}{\sum_{j=1}^m b_j^p} \geq \frac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^m a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_i}{\left(\sum_{j=1}^m b_j^p\right)^{\frac{1}{q}}} \quad / \sum_{i=1}^m$$

$$1 \geq \frac{\sum_{i=1}^m a_i b_i}{\left(\sum_{j=1}^m a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^m b_j^p\right)^{\frac{1}{q}}} \implies \sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \left(\sum_{j=1}^m a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^m b_j^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

což je znění Hölderovy nerovnosti

10 VÁZANÉ EXTRÉMY FCI VÍCE PROMĚNNÝCH

Příklady

Nalezněte vázané extrém fce: $f(x, y) = xy$ vzhledem k mn. daná vazbou $x + y = 1$

$$f(x, y, z) = xyz \text{ s vazb. } \begin{aligned} g_1 &= x + y + z = 0 \\ g_2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$f(x, y, z) = xy + yz \text{ s vazb. } \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

$$u = u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^p, \quad p > 1 \text{ na } M = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = a\}, \quad a > 0$$

$$u(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0 \text{ vzhl. k } M = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = a\}$$

Nalezněte globální extrém fce:

$$u(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y \text{ na množině } M = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$$

$$u(x, y) = x^2 - xy + y^2 \text{ na } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$$

$$u(x, y, z) = x + y + z \text{ na } M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

Do úseče eliptického paraboloidu $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $x, y, z \neq 0$, $z \leq c$ vepište kvádr max. objemu

11 Záměna proměnných

Motivace

zatím nevím

Aparát

Hledáme transformační fci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

jako bijekci mezi otevřenými množinami $\Omega \xleftrightarrow{f} f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, $f, f^{-1} \in C^1$

Záměna proměnných v ODR:

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ODR, kde $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \xleftrightarrow{\Psi} & \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \\ \text{staré proměnné} & & \text{nové proměnné} \end{array}$$

A) Záměna nezávislých proměnných $x \leftrightarrow t$

a) "staré" prom. pomocí "nových": $x = \varphi(t)$, $\varphi \in C^{(n)}$ a $\dot{\varphi} \neq 0$
 $y = u$

úkol: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \rightsquigarrow \tilde{F}(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n)})$

základní rovnost: $y(x) = u(t) \rightsquigarrow y(\varphi(t)) = u(t) \quad / \frac{d}{dt}$

$$\frac{dy}{dx}(\varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t) \iff y'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \dot{u}(t) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$y''(\varphi(t))(\dot{\varphi}(t))^2 + y'(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t) = \ddot{u}(t)$$

$$\Rightarrow y'(\varphi(t)) = \frac{\dot{u}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$$

$$\Rightarrow y''(\varphi(t)) = \frac{\ddot{u}(t) - y'(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)}$$

b) "nové" pomocí "starých": $t = \alpha(x)$, $\alpha \in C^{(n)}$, $\alpha' \neq 0$

$$\begin{array}{c} u = y \\ u(t) = y(x) \rightsquigarrow u(\alpha(x)) = y(x) \quad / \frac{d}{dx} \frac{d}{dt} \end{array}$$

$$\Rightarrow \dot{u}\alpha' = y'$$

$$\Rightarrow \ddot{u}(\alpha')^2 + \dot{u}\alpha'' = y''$$

B) Záměna závislých a nezávislých proměnných: $x, y(x) \leftrightarrow t, u(t)$

a) "staré" pomocí "nových": $x = \varphi(t, u)$, kde $\varphi, \psi \in C^{(n)}$ regulární
 $y = \psi(t, u)$

základní rovnost: $y(x) = \psi(t, u) \rightsquigarrow y(\varphi(t, u)) = \psi(t, u) \quad / \frac{d}{dt}$

$$y' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \dot{u} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \dot{u} \rightsquigarrow y' = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \dot{u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \dot{u}}$$

11 ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH

b) "nové" pomocí "starých": $t = \alpha(x, y)$, kde $\alpha, \beta \in C^{(n)}$ regulární
 $u = \beta(x, y)$

základní rovnost: $u(t) = \beta(x, y) \rightsquigarrow u(\alpha(x, y)) = \beta(x, y) \quad / \frac{d}{dx}$

$$\dot{u} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} y' \right) = \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} y' \rightsquigarrow \dot{u} = \frac{\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} y'}{\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} y'}$$

Záměna proměnných v parc. dif. rci

$F = F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial z}{\partial y^2}, \dots)$, kde $z = z(x, y)$

A) Záměna nezávislých proměnných

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}, \text{ a } z(x, y) = w(u, v)$$

a) "staré" prom. podle "nových": $x = \varphi(u, v)$, $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ je reg.
 $y = \psi(u, v)$

základní rovnost: $z(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = w(u, v) \quad / \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} : \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial v} \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}}_{\mathbb{J}^T \text{ reg.}} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix}$$

b) "nové" pomocí "starých": $u = \alpha(x, y)$
 $v = \beta(x, y)$

základní rovnost: $z(x, y) = w(\alpha(x, y), \beta(x, y)) \quad / \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{aligned}$$

B) Záměna závislých a nezávislých proměnných $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

a) "staré" pomocí "nových": $x = \varphi(u, v, w)$, kde $z(x, y), w(u, v)$
 $y = \psi(u, v, w)$
 $z = \xi(u, v, w)$

základní rovnost: $z(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w)) = \xi(u, v, w) \quad / \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} : \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) &= \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) = \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) &= \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) = \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{aligned}$$

11 ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH

b) "nové" podle "starých": $u = \alpha(x, y, z)$

$$v = \beta(x, y, z)$$

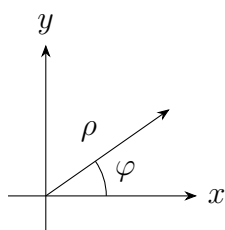
$$w = \gamma(x, y, z)$$

základní rovnost: $w(\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z)) = \gamma(x, y, z) \quad / \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : \frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial y}$$

Polární souřadnice



transf. ϕ :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad \rho \in (0, \infty)$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

$$\det D\phi : \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \neq 0$$

$$\phi((0, \infty) \times (-\pi, \pi)) = \mathbb{R}^2|_{P_\pi}, \text{ kde } P_\pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \wedge x \leq 0\}$$

$$\phi^{-1} : \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan^* \left(\frac{y}{x} \right) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x > 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \end{cases}$$

$$\text{transf. v dif. výrazech} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ w \end{pmatrix}, \text{ kde } z = z(x, y), w = w(\rho, \varphi)$$

a) "staré" $\rightarrow$ "nových":

základní rovnost: $z(x, y) = z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = w(\rho, \varphi)$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} : \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\partial w}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} : \frac{\partial z}{\partial x} (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial z}{\partial y} (\rho \cos \varphi) = \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial \rho} \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

11 ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH

b) jak spočítat inverzi?

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{\text{adj}} = \frac{1}{\rho} \mathbb{A}^{\text{adj}}, \text{ kde } (\mathbb{A}^{\text{adj}})_{ij} \equiv D_{ji} = (-1)^{i+j} M^{ji} = (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}^{ji}$$

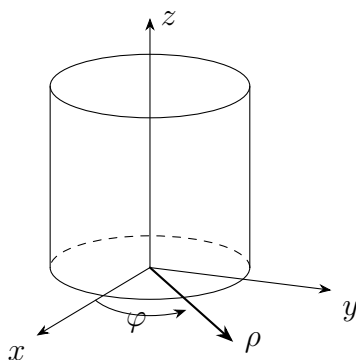
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \rho \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial \rho} \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Diferenciální operátory:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Válcové souřadnice



transf. ϕ :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad \rho \in (0, \infty)$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

$$z = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

$$\det D\phi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \neq 0$$

$$\phi((0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3|_{\mathbb{P}_\pi}) \times \mathbb{R}$$

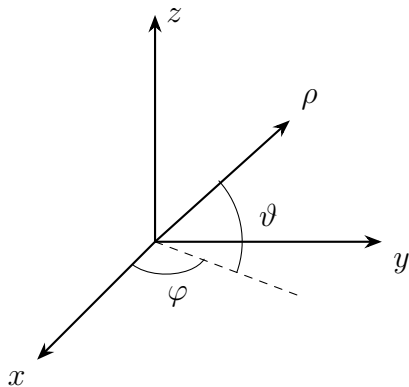
V dif. výrazech:

$$\nabla = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

11 ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH

Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^3$



transf. ϕ :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \quad \rho \in (0, \infty) \\ y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \quad \varphi \in (-\pi, \pi) \\ z &= \rho \sin \vartheta, \quad \vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (\mathbb{R}^2|_{P_\pi}) \times \mathbb{R}$$

ϕ lze chápat jako složení 2 válcových transf. $\phi \equiv \phi_1 \circ \phi_2$

$$\begin{aligned} \text{kde } \phi_1 : \quad x &= r \cos \varphi', \quad \phi_2 : \quad r = \rho \cos \vartheta \\ y &= r \sin \varphi' \quad \varphi' = \varphi \\ z &= \xi \quad \xi = \rho \sin \vartheta \end{aligned}$$

$$\phi_1 : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} : \phi_1 \begin{pmatrix} r \\ \varphi' \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi' \\ r \sin \varphi' \\ \xi \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) : \phi_2 \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \vartheta \\ \varphi \\ \rho \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(\rho, \varphi, \vartheta) = \phi_1(\rho \cos \vartheta, \varphi, \rho \sin \vartheta) = (\rho \cos \vartheta \cos \varphi, \rho \cos \vartheta \sin \varphi, \rho \sin \vartheta) = \phi(\rho, \varphi, \vartheta)$$

$$\det D\phi = \det D(\phi_1 \circ \phi_2) = \det D\phi_1 \det D\phi_2 = r\rho = \rho^2 \cos \vartheta > 0$$

Diferenciální operátory

$$\nabla_\phi = \left(\cos \varphi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \cos \varphi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\rho \cos \vartheta} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \sin \varphi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\rho \cos \vartheta} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)$$

$$\Delta_\phi = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

11 ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH

Zobecnění

11 ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH

Příklady

Záměna proměnných v ODR:

A) Záměna nezávislých proměnných

Ve výrazu $F(x, y, y', y'') = x^2 y'' + xy' + y$, kde $x \in (0, \infty)$ a $y \in C^{(2)}$ proveďte záměnu $x = e^t$

V dif. výrazu $F(x, y, y', y'') = y'' - y' \frac{\varepsilon \sin x}{1 - \varepsilon \cos x} - y(1 - \varepsilon \cos x)^2$, kde $\varepsilon \in (0, 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in C^{(2)}$ proveďte záměnu prom. pomocí tzv. *Keplerovy subst.* $t = x - \varepsilon \sin x$ a vyřešte ODR $f = 0$

B) Záměna závislých a nezávislých proměnných:

Vyřešte DR: $(1 - x^2)^2 y'' = -y$, kde $x \in \mathbb{R}$, $y \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ pomocí subst.
 $x = \tanh t$

$$y = \frac{u(t)}{\cosh t}$$

Mějme rovnici $y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, $A \in \mathbb{R}$, $a < b$. Proveďte záměnu prom. pomocí tzv. *Stokesovy subst.*: $u = \frac{y}{x-b}$
 $t = \ln \left(\frac{x-a}{x-b} \right)$

Záměna proměnných v parc. dif. rci

A) Záměna nezávislých proměnných

Vyřešte vlnovou rci: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, kde $c \neq 0$ je rychlost šíření vlny pomocí subst. $u = x - ct$

$$v = x + ct$$

Vyřešte rci: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ pomocí transf. $x = u$, kde $x, y \neq 0$
 $y = uv$

B) Záměna závislých a nezávislých proměnných

V rci: $(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, proveďte záměnu prom. pomocí $u = y - z$
 $v = y + z$
 $w = x$

Vyřešte PDR $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$, $x, y, z > 0$ pomocí subst.

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ \ln z - x - y \end{pmatrix}$$

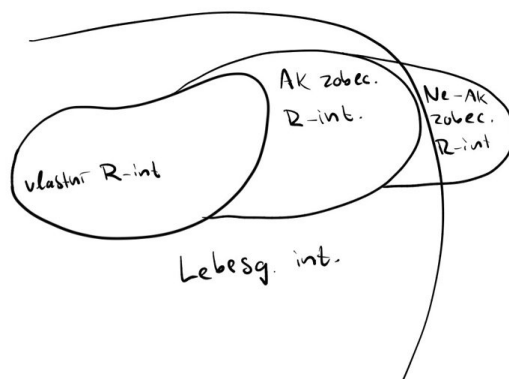
v DR $(1 - x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ proveďte záměnu pomocí

$$\Psi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin u \\ \sin v \\ e^w \end{pmatrix}$$

12 Lebesgueův integrál

Motivace

Definice Lebesgueova integrálu a následná aplikace základních vět.



Aparát

V: Nt $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ má AK zobec. R-int. na (a, b) .

Potom f je lebesg. int (L-int) na (a, b) a $\int_a^b f = \int_{(a,b)} f$

V (Tonelli - Fubini):

1) Tonelli: $f \in \mathcal{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$, pak:

$(\forall x \in X)(f(x, \cdot) \in \mathcal{L}_+(Y)) \wedge (\forall y \in Y)(f(\cdot, y) \in \mathcal{L}_+(X))$,

$\int f(\cdot, y) d\nu(y) \in \mathcal{L}_+(X) \wedge \int f(x, \cdot) d\mu(x) \in \mathcal{L}_+(Y)$,

$\int f d\mu \otimes \nu = \int (\int f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x) = \int (\int f(x, y) d\mu(x)) d\nu(y)$

2) Fubini: $f \in L(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$, pak:

$(\mu - \text{s.v. } x \in X)(f(x, \cdot) \in L(Y)) \wedge (\nu - \text{s.v. } y \in Y)(f(\cdot, y) \in L(X))$,

$\int f(\cdot, y) d\nu(y) \in L(X) \wedge \int f(x, \cdot) d\mu(x) \in L(Y)$,

$\int f d\mu \otimes \nu = \int (\int f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x) = \int (\int f(x, y) d\mu(x)) d\nu(y)$

V (O substituci):

Nt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot. a $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ difeomorf.

Nt f lebesg. měř. na $\phi(\Omega)$.

Potom $f \circ \phi$ je také lebesg. měř. na Ω

Pokud navíc $f \in L(\phi(\Omega), m)$, potom

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) dm(x) = \int_{\Omega} (f \circ \phi)(t) |\det D\phi(t)| dm(t)$$

12 LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Eulerovy integrály

$B \dots$ Eulerův integrál 1. druhu

$\Gamma \dots$ Eulerův integrál 2. druhu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{t^{x-1}} = 1 \Rightarrow \text{int. } \boxed{K} \iff \int_0^1 t^{x-1} dt \boxed{K} \iff x - 1 < -1$$

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt, \quad x, y > 0$$

pozn. : $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \forall z \in \mathbb{C}$

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt, \forall u, v \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} u, \operatorname{Re} v > 0$$

Nám se obzvlášť bude hodit tvar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} \varphi \cos^{\beta} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$, který

lze dokázat subst. $t = \sin^2 \varphi$

$$dt = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

V:

1) $(\forall x > 0)(\Gamma(x+1) = x\Gamma(x))$

2) $(\forall x, y > 0)(B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)})$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\Gamma(n+1) = n!)$

4) $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}) \dots \text{spec. } \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

V (Eulerův vzorec):

$$\forall x \in (0, 1), \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

V: $\Gamma \in C^{\infty}(0, \infty)$, ryze konvexní na $(0, \infty)$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$$

V (Lebesgue):

Nt $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \mu$ -s.v def. komplex měř. fcí, Nt dále platí:

1) $f_n \rightarrow f \mu$ -s.v.

2) $(\exists g \in L)(\forall n \in \mathbb{N})(\mu - \text{s.v } x \in X)(|f_n(x)| \leq g(x))$

Potom $f \in L$ a $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu$

12 LEBESGUEŮV INTEGRÁL

V (O limitě):

Mějme $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Nt $f : X \times (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, $t_0 \in (a, b)$ splň:

- i) $(\forall t \in (a, b))(f(\circ, t) \text{ měř.})$
- ii) $(\mu - \text{s.v. } x \in X)(\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) \equiv h(x))$
- iii) $(\exists g \in L)(\forall t \in (a, b))(\mu - \text{s.v. } x \in X)(|f(x, t)| \leq g(x))$

Potom $h \in L$ a $\int h(x) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$

V (O derivaci):

Nt $f : X \times (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ splň:

- i) $(\forall t \in (a, b))(f(\circ, t) \in L)$
- ii) $(\mu - \text{s.v. } x \in X)(f(x, \circ) \text{ diferenc. na } (a, b))$
- iii) $(\exists g \in L)(\forall t \in (a, b))(\mu - \text{s.v. } x \in X)(|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x))$

Potom $F(t) := \int f(x, t) d\mu(x)$ je diferenc. na (a, b) , $\frac{\partial f}{\partial t}(\circ, t) \in L$, $\forall t \in (a, b)$

a $\forall t \in (a, b) : F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$

pozn. : Za použití Lagrange, $|f(x, t)| \leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| |\frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi)| \stackrel{(iii)}{\leq} |f(x, t_0)| + |t - t_0| g(x) \in L \Leftrightarrow f(x, t_0) \in L$ lze nahradit (i) pro jedno $t_0 \in (a, b)$, čehož budeme hojně využívat.

12 LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Příklady:

Odvoďte tzv. *Dirichletovu formuli* pro $f \in L((0, a) \times (0, a))$, $a > 0$

$$\int_0^a \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^a \int_y^a f(x, y) dx dy$$

Zameňte pořadí integrace v $I = \int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx$

Zameňte pořadí integrace v $I = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy dx$, $a > 0$

Spoč. integrál $I = \int_M y^2 dx dy$,

kde $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 2\pi a), y \in (0, \phi(x))\}$,

kde ϕ značí oblouk cykloidy parametrizována vztahem

$$\phi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad t \in (0, 2\pi)$$

Vypočtěte $I = \int_M \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$

V integrálu $I = \int_M f(x, y) dx dy$ proveďte polární transformaci pro:

a) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$

b) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq ax\}$

Spočtěte $I = \int_M (x^2 + y^2) d(x, y)$, kde $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1\}$

Pro $a, b, h > 0$, $M = (a, a + h) \times (b, b + h) \subset \mathbb{R}^2$ uvažujme transformaci

$$\phi : M \rightarrow M' : \quad \begin{aligned} u &= \frac{y^2}{x} \\ v &= \sqrt{xy} \end{aligned} \quad \text{Spočtěte } \mu(M') \text{ a } \frac{\mu(M')}{\mu(M)}$$

Dokažte, že $\forall \alpha, \beta > -1$ platí $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$

Rozhodněte, pro která $m, n \in \mathbb{Z}$ integrál $I_{m,n} = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ konverguje a pro tyto hodnoty vypočtěte

Určete plochu S vymezenou nerovnostmi: $(x^2 + y^2) \leq 2a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$
 $x^2 + y^2 \geq a^2$

Spočtěte plochu Descartova listu $M : \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^5 \leq \frac{x^2 y^2}{c^4}$, $a, b, c, x, y > 0$

Spočtěte objem tělesa M: $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \leq \frac{z}{n} \exp\left(\frac{-\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\right)$

Spočtěte objem Vivianiho tělesa (tj. průniku koule a válce),

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax\}$$

Spočtěte objem tělesa $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \wedge x + y \geq z\}$

12 LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Spočítejte objem n -rozměrné koule $B^n(r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2\}$
Vypočítejte objem elipsoidu $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x \leq 1\}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ PD

Vypočítejte objem n -simplexu $M = [x_0, \dots, x_n]_\gamma = \{\sum_{i=0}^n t_i x_i \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0\}$,
kde $(x_0, \dots, x_n)$ je soubor afinně LNZ vektorů v $\mathbb{R}^n$,
tj. $(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)$ LN

Spočítejte integrál: $I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, $a, b > -1$

$a > 0, n \in \mathbb{N}_0$, spočítejte $I_n(a) = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a)^{n+1}} dx$

$|a| < 1$, spočítejte $I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spočítejte $I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\arctan(\alpha x) \arctan(\beta x)}{x^2} dx$

$a \in \mathbb{R} : I(a) = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx$

$I(a, b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos(bx) dx$, $a > 0, b \in \mathbb{R}$

$a, b > 0 : I(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$

$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$

$|a| < 1 : I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+a \cos x}{1-a \cos x}\right) \frac{dx}{\cos x}$

13 Křivkové a plošné integrály

Motivace

Definice křivkového integrálu 1. a 2. druhu a aplikace známých vzorečků z fyziky. Věty nemáme dokázané, na to slouží předmět variační počet na varietách.

Aparát

DEF(Křivka):

Zobr. $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ spoj.

DEF(Křivkový integrál 1. druhu):

Nt $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ po částech C^1 křivka, $f : [\phi] \equiv \phi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ integr.

Pokud $(f \circ \phi) \|\phi'\| \in L((a, b))$, def křivkový int. fce f podél křivky ϕ 1. druhu

$$\int_{\phi} f \, ds := \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| \, dt$$

$$\text{pozn. : } \phi'(t) = \begin{pmatrix} \phi'_1(t) \\ \vdots \\ \phi'_n(t) \end{pmatrix}$$

DEF(Křivkový integrál 2. druhu):

Nt $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ po částech C^1 křivka, $F : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}^n$ integr.

Def křivk. int. fce F podél křivky ϕ 2. druhu

$$\int_{\phi} F \cdot ds := \int_a^b \langle F(\phi(t)) | \phi'(t) \rangle \, dt := \int_{\phi} F_1 \, dx_1 + \dots + F_n \, dx_n$$

pozn. : $F : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}^n$ integr. $\iff \langle F \circ \phi | \phi' \rangle \in L((a, b))$

DEF (Jordanova křivka):

Křivku $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme:

jednoduchá $\stackrel{\text{def}}{\iff} \phi$ prosté uzavřená $\stackrel{\text{def}}{\iff} \phi(a) = \phi(b)$ jordanova $\stackrel{\text{def}}{\iff} \phi$ jednoduchá a uzavřená

DEF (Po částech C^1 hranice)

Nt $S \subset \mathbb{R}^2$ komp.

Řekn, že S má p.č. C^1 hranici $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$\exists m \in \mathbb{N}$, $\phi_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ p.č. C^1 Jordan. křivek tak, že $\forall i \neq j$, $[\phi_i] \cap [\phi_j] = \emptyset$

$$\text{a } \partial S = \bigcup_{i=1}^m [\phi_i]$$

13 KŘIVKOVÉ A PLOŠNÉ INTEGRÁLY

Dále hranici ∂S nazveme kladně orientovaná $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ pro každou křivku ϕ_j ,
 $\exists T(t) := \frac{\phi_j'(t)}{\|\phi_j'(t)\|}$, kde $T(t) = (T_1(t), T_2(t))$ až na konečně mnoho výjimek a
 $N(t) := (-T_2(t), T_1(t))$ směřuje do S , tj. $(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0))(\phi_j(t) + \varepsilon N(t) \in S)$

V (Green):

Nt $S \subset \mathbb{R}^2$ komp. s p.č. C^1 kladně orient. hranicí

$\Omega \supset S$ otev., $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F \in C^1(\Omega)$

Potom: $\int_{\partial S} F \cdot dS := \sum_{j=1}^n \int_{\phi_j} F \cdot dS = \int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$

DEF (Parametrizovaná p.č C^1 plocha):

Množinu $S \subset \mathbb{R}^3$ nazveme param. p.č. C^1 plocha $\stackrel{\text{def}}{\iff} S = S_1 \cup \dots \cup S_n$,
kde $S_i \subset \mathbb{R}^3$ splň:

- 1) $(\forall j \in \hat{n})(\exists \Omega_j \subset \mathbb{R}^2 \text{ nepr. oblast})(\exists \phi_j : \Omega_j \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tř. } C^1)(\phi_j(\Omega_j) = S_j^\circ)$
- 2) $(\forall i, j \in \hat{n}, i \neq j)$ je $S_i \cap S_j = \emptyset$, nebo sjednocení stop konečně mnoha po částech C^1 křivek.

DEF (Plošný integrál prvního druhu):

Nt $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$ parametr. p.č C^1 plocha

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$ integr. na S

potom plošný int. fce f přes plochu S prvního druhu def jako:

$$\int_S f dS := \sum_{j=1}^n \int_{S_j} f dS = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_j} f(\phi_j(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \right\| du dv$$

pozn. : $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilní $\stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall i \in \hat{n})((f \circ \phi_i) \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \right\| \in L(\Omega_i))$

pozn. : $a, b \in \mathbb{R}^3 : \|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a | b \rangle^2$

DEF (Plošný integrál 2. druhu):

Nt $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$ parametr. p.č C^1 plocha

$F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ integr. na S

potom plošný int. fce F přes plochu S druhého druhu def jako:

$$\int_S F \cdot dS := \sum_{j=1}^n \int_{S_j} F \cdot dS = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_j} \langle F \circ \phi_j | \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \rangle du dv$$

pozn. : $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ integrabilní $\stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall i \in \hat{n})(\langle F \circ \phi_i | \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \rangle \in L(\Omega_i))$

pozn. (vztah 1. a 2.): $\int_S F \cdot ds = \int_S \langle F | N \rangle dS$, kde $N = \frac{\frac{\partial \phi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_j}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \right\|}$ je jednotkový normálový vektor

13 KŘIVKOVÉ A PLOŠNÉ INTEGRÁLY

DEF(Obsah plochy):

Nt S param. p.č C^1 plocha, $A(S) = \int_S 1 \, ds$

DEF(Hranice orientovaná vnější jednotkovou normálou):

Mějme $R \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, $\partial R = S_1 \cup \dots \cup S_n$ p.č. C^1 plocha.

Řekneme, že ∂R je orient. vnější jedn. normálou $\stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall i \in \hat{n})(\exists N : S_i^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3)$ spoj. pole jedn. norm. vekt. k S_i "mířící vně R " tj. $(\forall i \in \hat{n})(\forall x \in S_i^\circ)(\exists \varepsilon_0 > 0)$
 $(\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0))(x + \varepsilon N(x) \notin R)$

V(Gauss):

Buď $R \subset \mathbb{R}^3$ komp. s parametr. p.č. C^1 hranicí orient vnějším jedn. normál. polem N . Nt $U \supset R$ ot. a $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tř. C^1 . Potom $\int_{\partial R} \langle F | N \rangle dS = \int_{\partial R} F \cdot dS = \int_R \operatorname{div} F \, dV$

DEF (Orientace indukovaná na hranici):

Nt $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$ je kompaktní param. p.č. C^1 plocha.

Nt $\partial S_i \equiv \partial^S S_i$ je rovna sjednocení konečně mnoha stop p.č. C^1 Jordan.

křivek. Ozn. $\partial S \equiv \bigcup_{i=1}^n \partial S_i$. Def orientaci indukovanou na ∂S_i :

$(\forall x \in \partial S_i)$ (zvolíme-li T_i jednotk. tečný vekt. v x k ∂S_i) $(N \times T_i)$ ukazuje do S_i)
tj. $(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0))(B_x(\varepsilon) \cap \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle y | N \times T_i \rangle > 0\} \neq \emptyset)$

V (Stokes):

Nt $S \subset \mathbb{R}^3$ splň. viz výše. $U \supset S$ ot. a $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tř. C^1 na U . Potom
 $\int_{\partial S} \langle F, T \rangle dS = \int_{\partial S} F \cdot dS = \int_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \int_S \langle \operatorname{rot} F | N \rangle dS$

pozn. (Divergenční věta): $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$

13 KŘIVKOVÉ A PLOŠNÉ INTEGRÁLY

Příklady

Spočítejte $\int_{\phi} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, kde $\phi : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$\int_{\phi} \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde $[\phi] = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$

$I = \int_{\phi} y^2 ds$, kde $\phi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $t \in [0, 2\pi]$

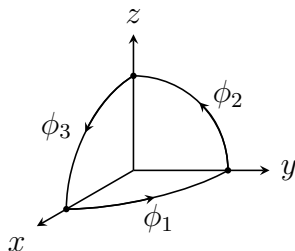
Spoč. křivkové integrály 2. druhu $I_i = \int_{\phi_i} 2xy dx + x^2 dy$,

kde ϕ_1 je úsečka spoj. body $(0, 0), (1, 1)$

ϕ_2 je parabola

ϕ_3 je lomená čára

Spoč. $I = \int_{\phi} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, kde $[\phi] = [\phi_1] \cup [\phi_2] \cup [\phi_3]$



Pomocí GV spočítejte $I = \int_{\phi} (e^x \sin y - py) dx + (e^x \cos y - p) dy$, kde ϕ je kladně orientovaná půlkružnice se středem $(\frac{a}{2}, 0)$ a poloměrem $\frac{a}{2}$.

Spočítejte $I = \int_{\phi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, kde ϕ kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v $(0, 0)$

Použitím GV spočítejte plochu elipsy

Spočítejte obsah koule o poloměru a

Spočítejte $I = \int_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} ds$, kde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, $a, b, c, > 0$

Spočítejte plochu Vivianiho tělesa, tj povrch tělesa vzniklého průnikem koule a válce: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

$$x^2 + y^2 \leq ax$$

Spočítejte $\int_S (x^2 + y^2) dx dy$, kde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0\}$, $R > 0$ s orientací $n = (0, 0, -1)$

$I = \int_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, kde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ s orientací určenou vnější normálou

Spočítejte $I = \int_{\phi} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$, kde $[\phi]$ je šroubovice v $\mathbb{R}^3$, $\phi : x = a \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$

$$y = a \sin t$$

$$z = \frac{h}{2\pi} t$$