ANA3 cv.

Tenhle dokument napsal DFK

Podpis: ____________________

Obsah

1 Konv. vlastního a nevlastního integrálu

Motivace

Tato kapitola je zaměřena na určování bodové, absolutní a neabsolutní konvergence vlastních a nevlastních integrálů závislých na parametrech. Postupně probereme základní srovnávací kritéria, Taylorovy rozvoje, pokročilá kritéria (Dirichlet, Abel, Hardy) a metodu výpočtu pomocí Froullaniho integrálu.

Aparát

Bez znalosti těchto základních věcí následující příklady budou obtížné.

$\int_0^1 x^p \, \mathrm{d}x \;\text{ K} \iff p > -1$

$\int_1^\infty x^p \, \mathrm{d}x \;\text{ K} \iff p < -1$

$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$\sin x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

$\cos x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad |x| < 1$

V(B-C kritérium pro nevlastní integrál):

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x \;\text{ K} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall b_1, b_2 \in (b-\delta, b)) \left| \int_{b_1}^{b_2} f \right| < \epsilon$$

V(Dirichlet + Abel)

Nechť $b \in \overline{\mathbb{R}}$ je jediný kritický bod $\int_a^b fg$.
$\forall c \in (a,b)$ je f R-integrabilní na $\langle a, c \rangle$, g monotónní na (a,b). Platí-li:

1. **(Dirichlet)** $F(y) = \int_a^y f$ je omezena na (a,b), $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$
2. **(Abel)** $\int_a^b f$ K (tzn. $\exists \lim\limits_{y \to b^-} F(y)$), g omezena na (a,b)

Pak $\int_a^b fg$ K

V(Hardy):

$f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, f p-periodická s $p > 0$ ($f(x) = f(x+p)$, $\forall x \geq a$),
f je R-int. na $[a, a+p]$, g je monotónní na $[a, \infty)$, $g(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$

$$\int_a^{a+p} f = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \int_a^\infty fg \;\text{ K} \\ \neq 0 & \Rightarrow \int_a^\infty fg \;\text{ K} \iff \int_a^\infty g \;\text{ K} \end{cases}$$

DEF: (Froullaniho integrál)
$a, b > 0,\ I(a,b) = \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$

V (Froullani):
Nechť $f \in \mathcal{C}(0,\infty)$, $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \coloneqq f_0$, $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \coloneqq f_\infty$
Potom:
1. $f_0, f_\infty \in \mathbb{R} \Rightarrow I(a,b) = (f_0 - f_\infty)\ln\frac{b}{a}$
2. $f_0 \in \mathbb{R} \wedge \int_1^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ K $\Rightarrow I(a,b) = f_0 \ln\frac{b}{a}$
3. $\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ K $\wedge f_\infty \in \mathbb{R} \Rightarrow I(a,b) = -f_\infty \ln\frac{b}{a}$
4. $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ K $\Rightarrow I(a,b) = 0$

Příklady

Určete konvergenci (případně absolutní konvergenci AK, neabsolutní konvergenci NeAK, či divergenci D) následujících integrálů:

1. $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$
2. $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x \cos^q x}$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q}$
6. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$
8. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x (\ln\ln x)^r}$
9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}$ $\quad (a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$
10. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}\,\mathrm{d}x$ AK NeAK D
11. $\int_0^\infty \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ $p \in \mathbb{R},\ q \geq 0$ AK NeAK D
12. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda + \sin x}\,\mathrm{d}x$ $\lambda > 0$ AK NeAK D
13. $\int_0^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^r}\,\mathrm{d}x$ $r \in \mathbb{R}$ AK NeAK D
14. $\int_0^\infty x^2 \cos(e^x)\,\mathrm{d}x$ AK NeAK D
15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ AK NeAK D
16. $I(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$

17. $I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\cos{(ax)} - \cos{(bx)}}{x} \,\mathrm{d}x$
18. $I(a,b) = \int_0^\infty \frac{b\sin{(ax)} - a\sin{(bx)}}{x} \,\mathrm{d}x$
19. $I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x} \,\mathrm{d}x$
20. $I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\sin{(ax)}\sin{(bx)}}{x} \,\mathrm{d}x$
21. $I(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n a_i \cos b_i x \,\mathrm{d}x$

2 Funkční posloupnosti

Motivace

Tato kapitola se věnuje bodové a stejnoměrné konvergenci funkčních posloupností. Zkoumáme kritéria pro určování stejnoměrné konvergence, chování součinu a podílu funkčních posloupností a speciální věty pro monotónní posloupnosti na kompaktních množinách.

Aparát

DEF: (SK funkční posloupnosti na množině A)
Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$
Řekneme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje (SK) na množině A
$\iff \exists f : A \to \mathbb{C}$ tak, že
$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon)$
pro všechna z, takže i pro supremum $\sup\limits_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$
$\iff \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = 0$

V (SK součinu funkčních posloupností):
Nechť $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g \implies f_n \cdot g_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \cdot g$, pokud f,g jsou omezené fce na A
$\Leftrightarrow$ $\{f_n\}, \{g_n\}$ jsou stejnoměrně/stejně omezené na A
$\Leftrightarrow$ $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq K)$

V (Dini):
Nechť $\varnothing \neq A \subset \mathbb{C}$ kompakt.
Nechť $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ spoj. na A vzhledem k A, $f_n \overset{A}{\to} f$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ monot.
$\implies f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$

Příklady

1. Vyšetřete SK $f_n(x) = x^n$ na a) $A = [0, \frac{1}{2}]$, b) $A = [0, 1]$
2. Vyšetřete SK $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $A = [0, 1]$
3. Vyšetřete SK $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ na $A = [0, 1]$
4. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$
5. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = \arctan(nx)$
6. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = x \arctan(nx)$

7. Najdete největší interval SK, $A \subset [0, \infty)$, pro $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$

8. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

9. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$

Bonusové příklady:

10. Najdete f_n a g_n z věty o součinu, které obě SK, ale $f_n \cdot g_n$ nebude SK (tedy ověřte nutnost podmínky omezenosti).

11. Zformulujte podobné tvrzení pro podíl (SK podílu funkčních posloupností).

12. Najdete př. $\{f_n\}$, f, a A, tak aby $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, ale $\{f_n\}$ nebyla omezená.

3 Funkční řady

Motivace

Tato kapitola se zabývá bodovou a stejnoměrnou konvergencí funkčních řad. Představíme Weierstrassovo kritérium (M-test), Dirichletovo a Abelovo kritérium a věty o záměně limitních operací (derivace a integrace člen po členu). Součástí je také určování součtů vybraných funkčních řad.

Aparát

DEF: (SK Funkčních řad)
Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A, resp. LSK na A $\iff$
$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ SK na A, resp. LSK na A, kde $S_n(z) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$

V (Weierstrass):
Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq g_n(z))$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ SK na A
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A

Poznámka (M-test):
Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$, $\exists \{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$ $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq M_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ K
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A

V (B-C kritérium pro funkce):
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A $\iff (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)| < \epsilon)$

V (NPSK - Nutná podmínka stejnoměrné konvergence):
Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A $\implies f_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0$

V (Abel, Dirichlet):
Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$, $g_n : A \to \mathbb{R}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní,
<u>Dirichlet:</u> $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|s_n(z)| \leq K) \land g_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0$
<u>Abel:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK $\land$ $(\exists L > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|g_n(z)| \leq L)$
potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n$ SK na A

V (O limitě):
Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$ a platí:
(i) $z_0 \in A'$
(ii) $\exists \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z) =: a_n$
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A
potom: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K
2. $\exists \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s(z)$, kde s je součtová fce $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s(z)$

V (O spojitosti):
Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in A$
Pokud pro $(\forall n \in \mathbb{N})$ (f_n je spoj. v z_0 vzhledem k A) a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK k součtové fci s, potom s je spoj. v z_0 vzhledem k A.

V (O integraci):
Nechť $f_n : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, nechť platí:
(i) $(\forall n \in \mathbb{N})$ (f_n je R-int na $\langle a, b\rangle$)
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na $\langle a, b\rangle$ k součt. fci s
potom: 1. s je R-int na $\langle a, b\rangle$
2. $\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$

V (O derivaci):
Nechť $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencovatelné. Nechť platí:
(i) $(\exists\, c \in (a, b))$ $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ K$)$
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ SK na (a, b)
potom: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na (a, b) k součt. fci s
2. s je dif. na (a, b)
3. $\forall x \in (a, b)$, $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

V (Abelova V):
Reálná mocninná řada je spojitá v celém svém oboru konvergence.

Příklady

Pokud není explicitně dán interval A, najděte jej. Vyšetřete bodovou konvergenci (BK) a stejnoměrnou konvergenci (SK):

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)}$, kde $x \in \mathbb{R}_0^+$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, na $A = [0, \infty)$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, na $A = \mathbb{R}$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n\ln^{\alpha} n}\right)$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, \infty)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ na $A = [0, \infty)$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$ na $A = [0, \infty)$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\sqrt{x^2+n^2}}$ na $A = \mathbb{R}$
14. Lze zaměnit $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$?
15. Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ platí: $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$?
16. $f_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}$, lze prohodit $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?
17. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n-1}$
18. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$
19. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$

Domácí úkol:

20. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$
21. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$

4 Fourierovy řady

Motivace

Před tím, než se pustíte do Fourierových řad, si důkladně zopakujte trigonometrické identity. Kapitola se věnuje rozvoji periodických funkcí do Fourierových řad, výpočtu Eulerových koeficientů a určení bodové konvergence těchto řad k regularizovanému periodickému prodloužení.

Aparát

DEF: (Fourierova řada)
Nechť je $f \in R(a,b)$, $T \coloneqq \frac{b-a}{2}$.
Trig. řadu $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)$ $\forall x \in (a,b)$,
kde $a_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$
$b_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$
nazvu FŘ fce f na $\langle a,b\rangle$ ... často $T = \pi$

DEF: (Po částech spojitá f)
Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
Řekneme, že f je p.č spojitá na $[a,b] \iff$
$\exists$ σ dělení $a \equiv x_0 < \cdots < x_m \equiv b$ takové, že

1. $(\forall i \in \hat{m})(f \in C(x_{i-1}, x_i))$
2. $(\forall i \in \widehat{m-1})(\exists f(x_i^{\pm}) \equiv \lim\limits_{y \to x_i^{\pm}} f(y) \in \mathbb{R})$ a $\exists f(a^+), f(b^-) \in \mathbb{R}$

DEF: (Periodické prodloužení)
Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
fci $f_{per} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def $f_{per}(x) \coloneqq f\left(x - \lfloor\frac{x-a}{b-a}\rfloor(b-a)\right)$ nazveme periodické prodloužení fce f.
Je-li navíc f p.č spoj. na $[a,b]$, def $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vztahem $f^*(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ a nazveme regularizované periodické prodloužení.

V (O konvergenci FŘ):
Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ má p.č. spojitou derivaci na $[a,b]$.
Potom FŘ fce f na (a,b) BK na $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ k funkci f^*.

Pokud nechcete počítat přes Eulerovy koeficienty, lze využít známého faktu:
$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$ na $(-\pi,\pi)$
$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$ na $(0, 2\pi)$

Příklady

Najděte Fourierovu řadu (FŘ) pro následující funkce:

1. $f(x) = x$ na a) $(-\pi, \pi)$, b) $(0, 2\pi)$

2. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ na $(0, 2\pi)$

3. $f(x) = \sin^4(x)$ na $(-\pi, \pi)$

4. $f(x) = \sin(\alpha x)$ na $(-\pi, \pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

5. $f(x) = \cos(\alpha x)$ na $(-\pi, \pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

6. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $(-\pi, \pi)$

7. $f(x) = x \sin(x)$ na $(-\pi, \pi)$

8. $f(x) = e^{\alpha x}$ na $(-\pi, \pi)$

9. $f(x) = \arcsin(\sin(x))$ na $(-\pi, \pi)$

10. $f(x) = \arcsin(\cos(x))$ na $(-\pi, \pi)$

11. Najděte FŘ fce: a) $f(x) = x^2$ na $(-\pi, \pi)$
    b) $f(x) = x^2$ na $(0, 2\pi)$
    c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) x^2$ na $(-\pi, \pi)$

12. Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$ (Nápověda/Hint: Fourierova řada fce $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \alpha \\ 0 & |x| \geq \alpha \end{cases}$ na $(-\pi, \pi)$)

13. $f(x) = \ln\left|\sin \frac{x}{2}\right|$ na $(-\pi, \pi)$

5 Limita a spojitost funkcí více proměnných

Motivace

Tato kapitola představuje základy topologie a limitního chování funkcí více proměnných v metrických a normovaných prostorech. Naučíme se dokazovat existenci limity z definice a vyvracet ji pomocí Heineho věty (volbou vhodných vícerozměrných posloupností či směrů).

Aparát

DEF: (Limita top. prostoru) Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) top prostory
$f : Df \subset X \to Y$, $x_0 \in Df'$, $y \in Y$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall H_y)(\exists H_{x_0})(\forall x \in H_{x_0} \setminus \{x_0\} \cap Df)(f(x) \in H_y)$$

spec. v metrických prostorech (X, ρ) (Y, σ) …nahradíme okolí koulema

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in Df,\ 0 < \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), y < \epsilon)$$

spec. v normovaných prostorech $\rho = \|\cdot\|_\rho$, lib. $\sigma = \|\cdot\|_\sigma$ v $(V, \|\cdot\|_\rho)$, $(W, \|\cdot\|_\sigma)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in Df,\ 0 < \|x - x_0\|_\rho < \delta)(\|f(x) - y\|_\sigma < \epsilon)$$

v příkladech $X = \mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|$, $Y = \mathbb{R}$ s normou $|\cdot|$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon)(\exists \delta)(\forall x \in Df,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta)(|f(x) - y| < \epsilon)}$$

V (Heine):
$f : D_f \subset X \to Y$, (X, ρ), (Y, σ)
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f \setminus \{x_0\})(x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to y)$$

Příklady

Vypočtěte limity nebo dokažte jejich neexistenci:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy+y^2-1}{x^2+y^2-2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

8. Lze fci $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ dodef. spoj. v počátku?

9. Lze fci $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ dodef. spoj. v počátku?

6 Diferenciální počet více proměnných

Motivace

Tato kapitola rozvíjí diferenciální počet funkcí více proměnných. Zaměřuje se na výpočet parciálních a směrových derivací, zkoumání totálního diferenciálu a totální derivace a uplatnění řetízkového pravidla (chain rule) při derivování složených zobrazení.

Aparát

DEF: (Parciální derivace)
Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \hat{n}$ a $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_i} f(a) \equiv \partial_i f(a),$$

kde e_i je i-tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$, nazýváme ji parciální derivace f podle i-té proměnné v bodě a.

Def: (Diferencovatelnost, Totální derivace)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$. Řekneme, že f je dif. v bodě a $\iff \exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ takové, že $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|f(x)-f(a)-T(x-a)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x-a\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$
Zobrazení $T \coloneqq Df(a)$ se nazve (totální) derivace f v bodě a.

Pozn: (Vztah derivace a parc. derivace)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dif. v $a \in \Omega \Rightarrow \exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ $\forall i \in \hat{n}$, $\forall j \in \hat{m}$ a platí

$$Df(a) \equiv {}^{\varepsilon_m}(Df(a))^{\varepsilon_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

V (Postačující podmínka diferencovatelnosti):
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$
Nechť $(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{m})(\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ na H_a a jsou spoj. v $a) \Rightarrow f$ je dif. v a

obecně $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

V (Záměnnost smíšených derivací):
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ na H_a a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ je spoj. v $a \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

DEF: (Směrová derivace)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$
$D_v f(a) \coloneqq \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$

<u>pozn.</u> $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv D_{e_i} f(a)$

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dif. v $a \in \Omega$.
Pak $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \equiv (\mathbb{R}^n)^\# \overset{Riesz}{\Rightarrow} \exists! w \in \mathbb{R}^n,\ Df(a)v = \langle w, v \rangle_2 = w^T v$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.
Def $\nabla f(a) \coloneqq w^T$ ... gradient f v a, $Df(a)v = \nabla f(a) \cdot v$
$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$

V (Derivace složené fce / Chain Rule):
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$
f dif. v $a \in \Omega$, g dif v $f(a)$, $f(\Omega) \subset U$
Potom $g \circ f$ je dif. v a a platí $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$

<u>**pozn.**</u>
$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m \times n}$

<u>**pozn.**</u> **Maticový zápis řetězového pravidla:**
$(Df(a))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, $i \in \hat{m}$, $j \in \hat{n}$
$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$

Příklady

1. Pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ spočtěte směrovou derivaci v bodě $(1,1)^T$ ve směru jednotkového vektoru, jehož úhel k ose x je 60°.

2. Vyšetřete derivace pro funkci $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. Pro funkci $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   1. Je f spojitá v počátku $(0, 0)$?
   2. Je f diferencovatelná v počátku $(0, 0)$?
   3. Jsou $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojité v počátku $(0, 0)$?

4. Dokažte: $\arctan x + \arctan y + \arctan z = \arctan \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$

5. Pro $f(x, y, z) = xyz \cdot e^{-x+y+z}$ urč. obec. tvar parc. der. $\frac{\partial^{m+n+v}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^v} f(x, y, z)$.

6. Pro funkci $f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ urči:

   1. Vyšetřete spojitost a diferencovatelnost f v $(0, 0)$.
   2. Spočítejte smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

7. Pro $w(x, y) = \begin{pmatrix} f(ax, by) \\ g(cx, dy) \end{pmatrix}$ určete totální derivaci $Dw(x, y)$.

8. Mějme $f = f(\xi, \eta)$, kde $\xi = x+y+z$ a $\eta = x^2+y^2+z^2$. Pro složené zobrazení $w = f \circ g\,(x, y, z)$, kde $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \xi(x, y, z) \\ \eta(x, y, z) \end{pmatrix}$, vyjádřete $Dw(x, y, z)$.

9. Mějme $u = u(\xi, \eta, \varphi)$, kde $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\eta = \sqrt{y^2 + z^2}$ a $\varphi = \sqrt{x^2 + z^2}$. Pro složené zobrazení $w = u \circ g$, kde $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{y^2 + z^2} \\ \sqrt{x^2 + z^2} \end{pmatrix}$, vyjádřete $Dw(x, y, z)$.

7 Extrémy funkcí více proměnných

Motivace

Tato kapitola je věnována hledání lokálních a globálních extrémů funkcí více proměnných. Naučíme se nacházet stacionární body pomocí nulovosti gradientu (nutná podmínka) a klasifikovat je pomocí definitnosti Hessovy matice (postačující podmínka) s využitím Sylvesterova kritéria.

Aparát

$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m \times n}$
$D^2 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \mathbb{R}^{m \times n \times n}$

DEF:(Lokální maximum a minimum)
Řekneme, že $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální minimum
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$

Řekneme, že $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální maximum
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$

V (Nutná podmínka existence lokálního extrému):
Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má extrém v bodě $a \in \Omega$ a f je v a diferencovatelná
$\Rightarrow \boxed{\nabla f(a) = 0}$
(Bod a se pak nazývá stacionární nebo kritický bod).

V (Postačující podmínka existence lokálního extrému):
Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 na Ω (všechny parciální derivace druhého řádu jsou spojité), $a \in \Omega$ a $\nabla f(a) = 0$.
Potom platí:

1. Je-li Hessova matice $\nabla^2 f(a)$ pozitivně definitní (PD) $\Rightarrow$ má f v a ostré lokální minimum.

2. Je-li Hessova matice $\nabla^2 f(a)$ negativně definitní (ND) $\Rightarrow$ má f v a ostré lokální maximum.

3. Je-li Hessova matice $\nabla^2 f(a)$ indefinitní (IND) $\Rightarrow$ nemá f v a extrém (jedná se o sedlový bod).

kde $\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$ je Hessova matice.

V (Sylvesterovo kritérium):
Nechť Q je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru V a $\mathcal{X}$ je báze V. Pak platí:

1. Q je pozitivně definitní, právě když matice formy ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechny hlavní subdeterminanty kladné, tj. $\Delta_k > 0$ pro každé $k \in \hat{n}$.

2. Q je negativně definitní, právě když matice formy ${}^{\mathcal{X}}Q$ splňuje pro každé $k \in \hat{n}$:
$$\Delta_k > 0, \quad \text{je-li } k \text{ sudé,}$$
$$\Delta_k < 0, \quad \text{je-li } k \text{ liché.}$$

Příklady

Najděte lokální extrémy a sedlové body následujících funkcí:

1. $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
2. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
3. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$
4. $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
5. $u(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
6. $u(x,y,z) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) - \sin(x+y+z)$
7. $u(x,y) = (1 + e^y)\cos(x) - ye^y$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy