

ANA3 cv.

Tento dokument je neoficiálním, soukromým studijním materiálem. Text představuje autorskou syntézu, shrnutí a osobní interpretaci témat probíraných na cvičení doc. Ing. František Štampach, Ph.D. v ZS 2025/2026. Nejedná se o oficiální výukový materiál ČVUT, o doslovný přepis přednášek ani o dílo schválené vyučujícím. Všechny ochranné známky, názvy předmětů a případné citované metodiky jsou vlastnictvím příslušných držitelů práv.

Text je poskytován bezúplatně, pro osobní studijní potřeby a bez jakýchkoliv záruk za správnost, úplnost či aktuálnost obsahu. Autor nenese v souladu s § 2950 zákona č. 89/2012 Sb., občanský zákoník, odpovědnost za jakoukoliv újmu (včetně neúspěchu u zkoušek či jiných studijních povinností), která by vznikla v důsledku spoléhání se na informace v tomto textu. Užití materiálů je výhradně na vlastní nebezpečí čtenáře.

Tímto prohlašuji, že jsem tento text vypracoval samostatně na základě vlastních poznámek pořízených v průběhu cvičení.

V Praze dne 15. srpna 2026

Obsah

1 Konv. vlastního a nevlastního integrálu	1
Motivace	1
Aparát	1
Příklady	2
2 Funkční posloupnosti	4
Motivace	4
Aparát	4
Příklady	4
3 Funkční řady	6
Motivace	6
Aparát	6
Příklady	8
4 Fourierovy řady	9
Motivace	9
Aparát	9
Příklady	10
5 Limita a spojitost funkcí více proměnných	11
Motivace	11
Aparát	11
Příklady	12
6 Diferenciální počet více proměnných	13
Motivace	13
Aparát	13
Příklady	15
7 Extrémy funkcí více proměnných	16
Motivace	16
Aparát	16
Příklady	17

1 Konv. vlastního a nevlastního integrálu

Motivace

Tato kapitola je zaměřena na určování bodové, absolutní a neabsolutní konvergence vlastních a nevlastních integrálů závislých na parametrech. Postupně probereme základní srovnávací kritéria, Taylorovy rozvoje, pokročilá kritéria (Dirichlet, Abel, Hardy) a metodu výpočtu pomocí Froullaného integrálu.

Aparát

Bez znalosti těchto základních věcí následující příklady budou obtížné.

$$\int_0^1 x^p dx \text{ K} \iff p > -1 \quad (\text{D} \iff p \leq -1)$$

$$\int_1^\infty x^p dx \text{ K} \iff p < -1 \quad (\text{D} \iff p \geq -1)$$

$$\int_0^\infty x^p dx \text{ diverguje vždy (pro žádné } p \in \mathbb{R} \text{ nekonverguje)}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1$$

V (Nelimitní srovnávací kritérium):

Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$ a funkce f, g jsou nezáporné a měřitelné (či lokálně riemannovsky integrovatelné) na $[a, b]$. Nechť navíc platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in [a, b]$. Pak platí:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx \text{ konverguje} &\implies \int_a^b f(x) dx \text{ konverguje} \\ \int_a^b f(x) dx \text{ diverguje} &\implies \int_a^b g(x) dx \text{ diverguje} \end{aligned}$$

V (Limitní srovnávací kritérium):

Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$ a funkce f, g jsou nezáporné a měřitelné na $[a, b]$, přičemž b je jediný kritický bod. Nechť existuje limita $L = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Pak platí:

$$1. \text{ Je-li } L \in (0, \infty), \text{ pak } \int_a^b f(x) dx \text{ K} \iff \int_a^b g(x) dx \text{ K.}$$

1 KONV. VLASTNÍHO A NEVLASTNÍHO INTEGRÁLU

2. Je-li $L = 0$, pak $\int_a^b g(x) dx \text{ K} \implies \int_a^b f(x) dx \text{ K}$.

3. Je-li $L = \infty$, pak $\int_a^b g(x) dx \text{ D} \implies \int_a^b f(x) dx \text{ D}$.

V(B-C kritérium pro nevlastní integrál):

$$\int_a^b f dx \text{ K} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall b_1, b_2 \in (b - \delta, b)) \left| \int_{b_1}^{b_2} f \right| < \epsilon$$

V(Dirichlet + Abel)

Nechť $b \in \overline{\mathbb{R}}$ je jediný kritický bod $\int_a^b fg$.

$\forall c \in (a, b)$ je f R-integrabilní na $\langle a, c \rangle$, g monotónní na (a, b) . Platí-li:

1. **(Dirichlet)** $F(y) = \int_a^y f$ je omezena na (a, b) , $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$
2. **(Abel)** $\int_a^b f \text{ K}$ (tzn. $\exists \lim_{y \rightarrow b^-} F(y)$), g omezena na (a, b)

Pak $\int_a^b fg \text{ K}$

V(Hardy):

$f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f p -periodická s $p > 0$ ($f(x) = f(x + p)$, $\forall x \geq a$),
 f je R-int. na $[a, a + p]$, g je monotónní na $[a, \infty)$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

$$\int_a^{a+p} f = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \int_a^\infty fg \text{ K} \\ \neq 0 & \Rightarrow \int_a^\infty fg \text{ K} \iff \int_a^\infty g \text{ K} \end{cases}$$

DEF: (Froullaniho integrál)

$$a, b > 0, \quad I(a, b) = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

V (Froullani):

Nechť $f \in \mathcal{C}(0, \infty)$, $\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) := f_0$, $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) := f_\infty$

- Potom:
1. $f_0, f_\infty \in \mathbb{R} \Rightarrow I(a, b) = (f_0 - f_\infty) \ln \frac{b}{a}$
 2. $f_0 \in \mathbb{R} \wedge \int_1^\infty \frac{f(t)}{t} dt \text{ K} \Rightarrow I(a, b) = f_0 \ln \frac{b}{a}$
 3. $\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt \text{ K} \wedge f_\infty \in \mathbb{R} \Rightarrow I(a, b) = -f_\infty \ln \frac{b}{a}$
 4. $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt \text{ K} \Rightarrow I(a, b) = 0$

Příklady

Určete konvergenci (případně absolutní konvergenci AK, neabsolutní konvergenci NeAK, či divergenci D) následujících integrálů:

1. $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$

1 KONV. VLASTNÍHO A NEVLASTNÍHO INTEGRÁLU

2. $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$
6. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$
7. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$
8. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x (\ln \ln x)^r}$
9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \dots |x-a_n|^{p_n}} \quad (a_1 < a_2 < \dots < a_n)$
10. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \quad \text{AK NeAK D}$
11. $\int_0^\infty \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx \quad p \in \mathbb{R}, q \geq 0 \quad \text{AK NeAK D}$
12. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda + \sin x} dx \quad \lambda > 0 \quad \text{AK NeAK D}$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^r} dx \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{AK NeAK D}$
14. $\int_0^\infty x^2 \cos(e^x) dx \quad \text{AK NeAK D}$
15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx \quad \text{AK NeAK D}$
16. $I(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$
17. $I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$
18. $I(a, b) = \int_0^\infty \frac{b \sin(ax) - a \sin(bx)}{x} dx$
19. $I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x} dx$
20. $I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x} dx$
21. $I(a, b) = \int_0^\infty \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n a_i \cos b_i x dx$

2 Funkční posloupnosti

Motivace

Tato kapitola se věnuje bodové a stejnoměrné konvergenci funkčních posloupností. Zkoumáme kritéria pro určování stejnoměrné konvergence, chování součinu a podílu funkčních posloupností a speciální věty pro monotónní posloupnosti na kompaktních množinách.

Aparát

DEF: (SK funkční posloupnosti na množině A)

Nechť $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

Řekneme, že $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konverguje (SK) na množině A

$\iff \exists f : A \rightarrow \mathbb{C}$ tak, že

$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon)$

pro všechna z , takže i pro supremum $\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$

$\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = 0$

V (SK součinu funkčních posloupností):

Nechť $f_n \xrightarrow{A} f$, $g_n \xrightarrow{A} g \implies f_n \cdot g_n \xrightarrow{A} f \cdot g$, pokud f, g jsou omezené fce na A

$\iff \{f_n\}, \{g_n\}$ jsou stejnoměrně/stejně omezené na A

$\iff (\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq K)$

V (Dini):

Nechť $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ kompakt.

Nechť $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ spoj. na A vzhledem k A , $f_n \xrightarrow{A} f$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ monot.

$\implies f_n \xrightarrow{A} f$

Příklady

1. Vyšetřete SK $f_n(x) = x^n$ na a) $A = [0, \frac{1}{2}]$, b) $A = [0, 1]$
2. Vyšetřete SK $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $A = [0, 1]$
3. Vyšetřete SK $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ na $A = [0, 1]$
4. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$
5. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = \arctan(nx)$
6. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = x \arctan(nx)$

2 FUNKČNÍ POSLOUPNOSTI

7. Najdete největší interval SK, $A \subset [0, \infty)$, pro $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$
8. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
9. Najdete největší interval SK, $A \subset D_{f_n}$ pro $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$

Bonusové příklady:

10. Najdete f_n a g_n z věty o součinu, které obě SK, ale $f_n \cdot g_n$ nebude SK (tedy ověřte nutnost podmínky omezenosti).
11. Zformulujte podobné tvrzení pro podíl (SK podílu funkčních posloupností).
12. Najdete př. $\{f_n\}$, f , a A , tak aby $f_n \xrightarrow{A} f$, ale $\{f_n\}$ nebyla omezená.

3 Funkční řady

Motivace

Tato kapitola se zabývá bodovou a stejnoměrnou konvergencí funkčních řad. Představíme Weierstrassovo kritérium (M-test), Dirichletovo a Abelovo kritérium a věty o záměně limitních operací (derivate a integrace člen po členu). Součástí je také určování součtů vybraných funkčních řad.

Aparát

DEF: (SK Funkčních řad)

Nechť $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A, resp. LSK na A $\iff$

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ SK na A, resp. LSK na A, kde $S_n(z) := \sum_{k=1}^n f_k(z)$

V (Weierstrass):

Nechť $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq g_n(z))$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ SK na A

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A

Poznámka (M-test):

Nechť $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $\exists \{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$ $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq M_n)$ a

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A

V (B-C kritérium pro funkce):

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A $\iff (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)| < \epsilon)$

V (NPSK - Nutná podmínka stejnoměrné konvergence):

Nechť $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A $\implies f_n \xrightarrow{A} 0$

V (Abel, Dirichlet):

Nechť $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $g_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní,

Dirichlet: $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|s_n(z)| \leq K) \wedge g_n \xrightarrow{A} 0$

Abel: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK $\wedge (\exists L > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|g_n(z)| \leq L)$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n$ SK na A

3 FUNKČNÍ ŘADY

V (O limitě):

Nechť $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ a platí:

- (i) $z_0 \in A'$
- (ii) $\exists \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f_n(z) =: a_n$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na A

potom: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K
2. $\exists \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} s(z)$, kde s je součtová fce $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} s(z)$

V (O spojitosti):

Nechť $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ a $z_0 \in A$

Pokud pro $(\forall n \in \mathbb{N})$ (f_n je spoj. v z_0 vzhledem k A) a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK k součtové fci s , potom s je spoj. v z_0 vzhledem k A .

V (O integraci):

Nechť $f_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, nechť platí:

- (i) $(\forall n \in \mathbb{N})$ (f_n je R-int na $\langle a, b \rangle$)
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na $\langle a, b \rangle$ k součt. fci s

potom: 1. s je R-int na $\langle a, b \rangle$
2. $\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$

V (O derivaci):

Nechť $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelné. Nechť platí:

- (i) $(\exists c \in (a, b))$ ($\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ K)
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ SK na (a, b)

potom: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ SK na (a, b) k součt. fci s
2. s je dif. na (a, b)
3. $\forall x \in (a, b), s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

V (Abelova V):

Reálná mocninná řada je spojitá v celém svém oboru konvergence.

3 FUNKČNÍ ŘADY

Příklady

Pokud není explicitně dán interval A , najděte jej. Vyšetřete bodovou konvergenci (BK) a stejnoměrnou konvergenci (SK):

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)}$, kde $x \in \mathbb{R}_0^+$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$, na $A = [0, \infty)$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}$, na $A = \mathbb{R}$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n \ln^\alpha n}\right)$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, \infty)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \left(\frac{1}{3^n x}\right)$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ na $A = [0, \infty)$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x) \sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$ na $A = [0, \infty)$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\sqrt{x^2+n^2}}$ na $A = \mathbb{R}$
14. Lze zaměnit $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$?
15. Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ platí: $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{x}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$?
16. $f_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}$, lze prohodit $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$?
17. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n-1}$
18. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$
19. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$

Domácí úkol:

20. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$
21. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$

4 Fourierovy řady

Motivace

Před tím, než se pustíte do Fourierových řad, si důkladně zopakujte trigonometrické identity. Kapitola se věnuje rozvoji periodických funkcí do Fourierových řad, výpočtu Eulerových koeficientů a určení bodové konvergence těchto řad k regularizovanému periodickému prodloužení.

Aparát

DEF: (Fourierova řada)

Nechť je $f \in R(a, b)$, $T := \frac{b-a}{2}$.

Trig. řadu $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi x}{T}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{T})) \quad \forall x \in (a, b)$,

kde $a_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) \cos(\frac{n\pi x}{T}) dx$, $n \in \mathbb{N}_0$

$b_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) \sin(\frac{n\pi x}{T}) dx$, $n \in \mathbb{N}$

nazvu FR fce f na $\langle a, b \rangle$... často $T = \pi$

DEF: (Po částech spojitá f)

Nechť $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

Řekneme, že f je p.č. spojitá na $[a, b] \iff$

$\exists \sigma$ dělení $a \equiv x_0 < \dots < x_m \equiv b$ takové, že

1. $(\forall i \in \hat{m})(f \in C(x_{i-1}, x_i))$

2. $(\forall i \in \overline{m-1})(\exists f(x_i^\pm) \equiv \lim_{y \rightarrow x_i^\pm} f(y) \in \mathbb{R})$ a $\exists f(a^+), f(b^-) \in \mathbb{R}$

DEF: (Periodické prodloužení)

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

fci $f_{per} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ def $f_{per}(x) := f(x - \lfloor \frac{x-a}{b-a} \rfloor (b-a))$ nazveme periodické prodloužení fce f .

Je-li navíc f p.č. spoj. na $[a, b]$, def $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem $f^*(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ a nazveme regularizované periodické prodloužení.

V (O konvergenci FŘ):

Nechť $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ má p.č. spojitou derivaci na $[a, b]$.

Potom FŘ fce f na (a, b) BK na $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ k funkci f^* .

Pokud nechcete počítat přes Eulerovy koeficienty, lze využít známého faktu:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad \text{na } (-\pi, \pi)$$

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \quad \text{na } (0, 2\pi)$$

4 FOURIEROVY ŘADY

Příklady

Najděte Fourierovu řadu (FŘ) pro následující funkce:

1. $f(x) = x$ na a) $(-\pi, \pi)$, b) $(0, 2\pi)$
2. $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ na $(0, 2\pi)$
3. $f(x) = \sin^4(x)$ na $(-\pi, \pi)$
4. $f(x) = \sin(\alpha x)$ na $(-\pi, \pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
5. $f(x) = \cos(\alpha x)$ na $(-\pi, \pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $(-\pi, \pi)$
7. $f(x) = x \sin(x)$ na $(-\pi, \pi)$
8. $f(x) = e^{\alpha x}$ na $(-\pi, \pi)$
9. $f(x) = \arcsin(\sin(x))$ na $(-\pi, \pi)$
10. $f(x) = \arcsin(\cos(x))$ na $(-\pi, \pi)$
11. Najděte FŘ fce: a) $f(x) = x^2$ na $(-\pi, \pi)$
 b) $f(x) = x^2$ na $(0, 2\pi)$
 c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)x^2$ na $(-\pi, \pi)$
12. Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$ (Nápověda/Hint: Fourierova řada fce $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \alpha \\ 0 & |x| \geq \alpha \end{cases}$ na $(-\pi, \pi)$)
13. $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ na $(-\pi, \pi)$

5 Limita a spojitost funkcí více proměnných

Motivace

Tato kapitola představuje základy topologie a limitního chování funkcí více proměnných v metrických a normovaných prostorech. Naučíme se dokazovat existenci limity z definice a vyvracet ji pomocí Heineho věty (volbou vhodných vícerozměrných posloupností či směrů).

Aparát

DEF: (Limita top. prostoru) Necht' (X, τ_X) , (Y, τ_Y) top prostory
 $f : D_f \subset X \rightarrow Y$, $x_0 \in D_f$, $y \in Y$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall H_y)(\exists H_{x_0})(\forall x \in H_{x_0} \setminus \{x_0\} \cap D_f)(f(x) \in H_y)$$

spec. v metrických prostorech (X, ρ) (Y, σ) ... nahradíme okolí koulema

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, 0 < \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), y) < \epsilon)$$

spec. v normovaných prostorech $\rho = \|\cdot\|_\rho$, lib. $\sigma = \|\cdot\|_\sigma$ v $(V, \|\cdot\|_\rho)$, $(W, \|\cdot\|_\sigma)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, 0 < \|x - x_0\|_\rho < \delta)(\|f(x) - y\|_\sigma < \epsilon)$$

v příkladech $X = \mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|$, $Y = \mathbb{R}$ s normou $|\cdot|$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon)(\exists \delta)(\forall x \in D_f, 0 < \|x - x_0\| < \delta)(|f(x) - y| < \epsilon)$$

V (Heine):

$f : D_f \subset X \rightarrow Y$, (X, ρ) , (Y, σ)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D_f \setminus \{x_0\})(x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow y)$$

5 LIMITA A SPOJITOST FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Příklady

Vypočtěte limity nebo dokažte jejich neexistenci:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2-xy+y^2-1}{x^2+y^2-2}$

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right)$

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

8. Lze fci $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$ dodef. spoj. v počátku?

9. Lze fci $f(x, y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ dodef. spoj. v počátku?

6 Diferenciální počet více proměnných

Motivace

Tato kapitola rozvíjí diferenciální počet funkcí více proměnných. Zaměřuje se na výpočet parciálních a směrových derivací, zkoumání totálního diferenciálu a totální derivace a uplatnění řetízkového pravidla (chain rule) při derivování složených zobrazení.

Aparát

DEF: (Parciální derivace)

Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \hat{n}$ a $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_i} f(a) \equiv \partial_i f(a),$$

kde e_i je i -tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$, nazýváme ji parciální derivace f podle i -té proměnné v bodě a .

Def: (Diferencovatelnost, Totální derivace)

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$. Řekneme, že f je dif. v bodě $a \iff \exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ takové, že $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x-a\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$

Zobrazení $T := Df(a)$ se nazve (totální) derivace f v bodě a .

Pozn: (Vztah derivace a parc. derivace)

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dif. v $a \in \Omega \Rightarrow \exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \forall i \in \hat{n}, \forall j \in \hat{m}$ a platí

$$Df(a) \equiv {}^{\varepsilon_m}(Df(a)){}^{\varepsilon_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

V (Postačující podmínka diferencovatelnosti):

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$

Nechť $(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{m})(\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i})$ na H_a a jsou spoj. v $a \Rightarrow f$ je dif. v a

obecně $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

V (Záměnnost smíšených derivací):

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ na H_a a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ je spoj. v $a \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

6 DIFERENCIÁLNÍ POČET VÍCE PROMĚNNÝCH

DEF: (Směrová derivace)

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n, a \in \Omega$

$$D_v f(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

pozn. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv D_{e_i} f(a)$

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je dif. v $a \in \Omega$.

Pak $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \equiv (\mathbb{R}^n)^\# \xrightarrow{Riesz} \exists! w \in \mathbb{R}^n, Df(a)v = \langle w, v \rangle_2 = w^T v, \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Def $\nabla f(a) := w^T \dots$ gradient f v a , $Df(a)v = \nabla f(a) \cdot v$

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

V (Derivace složené fce / Chain Rule):

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$

f dif. v $a \in \Omega$, g dif v $f(a)$, $f(\Omega) \subset U$

Potom $g \circ f$ je dif. v a a platí $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$

pozn.

$$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m \times n}$$

pozn. Maticový zápis řetězového pravidla:

$$(Df(a))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), i \in \hat{m}, j \in \hat{n}$$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

6 DIFERENCIÁLNÍ POČET VÍCE PROMĚNNÝCH

Příklady

1. Pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ spočítejte směrovou derivaci v bodě $(1, 1)^T$ ve směru jednotkového vektoru, jehož úhel k ose x je 60° .

2. Vyšetřete derivace pro funkci $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. Pro funkci $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Je f spojitá v počátku $(0, 0)$?

2. Je f diferencovatelná v počátku $(0, 0)$?

3. Jsou $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ spojité v počátku $(0, 0)$?

4. Dokažte: $\arctan x + \arctan y + \arctan z = \arctan \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$

5. Pro $f(x, y, z) = xyz \cdot e^{-x+y+z}$ urč. obec. tvar parc. der. $\frac{\partial^{m+n+v}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^v} f(x, y, z)$.

6. Pro funkci $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ urči:

1. Vyšetřete spojitost a diferencovatelnost f v $(0, 0)$.

2. Spočítejte smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

7. Pro $w(x, y) = \begin{pmatrix} f(ax, by) \\ g(cx, dy) \end{pmatrix}$ určete totální derivaci $Dw(x, y)$.

8. Mějme $f = f(\xi, \eta)$, kde $\xi = x+y+z$ a $\eta = x^2+y^2+z^2$. Pro složené zobrazení $w = f \circ g(x, y, z)$, kde $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \xi(x, y, z) \\ \eta(x, y, z) \end{pmatrix}$, vyjádřete $Dw(x, y, z)$.

9. Mějme $u = u(\xi, \eta, \varphi)$, kde $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\eta = \sqrt{y^2 + z^2}$ a $\varphi = \sqrt{x^2 + z^2}$. Pro složené zobrazení $w = u \circ g$, kde $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{y^2 + z^2} \\ \sqrt{x^2 + z^2} \end{pmatrix}$, vyjádřete $Dw(x, y, z)$.

7 Extrémy funkcí více proměnných

Motivace

Tato kapitola je věnována hledání lokálních a globálních extrémů funkcí více proměnných. Naučíme se nacházet stacionární body pomocí nulovosti gradientu (nutná podmínka) a klasifikovat je pomocí definitnosti Hessiany matice (postačující podmínka) s využitím Sylvesterova kritéria.

Aparát

$$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$D^2f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \mathbb{R}^{m \times n \times n}$$

DEF:(Lokální maximum a minimum)

Řekneme, že $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální minimum

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$$

Řekneme, že $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální maximum

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$$

V (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má extrém v bodě $a \in \Omega$ a f je v a diferencovatelná

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(a) = 0}$$

(Bod a se pak nazývá stacionární nebo kritický bod).

V (Postačující podmínka existence lokálního extrému):

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^2 na Ω (všechny parciální derivace druhého řádu jsou spojitě), $a \in \Omega$ a $\nabla f(a) = 0$.

Potom platí:

1. Je-li Hessova matice $\nabla^2 f(a)$ pozitivně definitní (PD) $\Rightarrow$ má f v a ostré lokální minimum.
2. Je-li Hessova matice $\nabla^2 f(a)$ negativně definitní (ND) $\Rightarrow$ má f v a ostré lokální maximum.
3. Je-li Hessova matice $\nabla^2 f(a)$ indefinitní (IND) $\Rightarrow$ nemá f v a extrém (jedná se o sedlový bod).

7 EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

kde $\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$ je Hessova matice.

V (Sylvesterovo kritérium):

Nechť Q je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru V a $\mathcal{X}$ je báze V . Pak platí:

1. Q je pozitivně definitní, právě když matice formy ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechny hlavní subdeterminanty kladné, tj. $\Delta_k > 0$ pro každé $k \in \hat{n}$.
2. Q je negativně definitní, právě když matice formy ${}^{\mathcal{X}}Q$ splňuje pro každé $k \in \hat{n}$:

$$\Delta_k > 0, \quad \text{je-li } k \text{ sudé,}$$

$$\Delta_k < 0, \quad \text{je-li } k \text{ liché.}$$

Příklady

Najděte lokální extrémy a sedlové body následujících funkcí:

1. $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
2. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
3. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$
4. $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
5. $u(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
6. $u(x, y, z) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) - \sin(x + y + z)$
7. $u(x, y) = (1 + e^y) \cos(x) - ye^y$

REFERENCE

Reference

- [1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy